

Interrogation de cours 2

1. Compléter les développements limités en 0 suivants. On les écrira à l'ordre 3.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + O_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + O_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + O_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + O_{x \rightarrow 0}(x^3)\end{aligned}$$

Commentaire

- Dans la question, il est demandé d'écrire les développements limités à l'ordre 3. Il était aussi correct d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\end{aligned}$$

- Pour passer de cette écriture à celle présente dans l'énoncé, il suffit de comprendre :

$$x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = O_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

La notation $O_{x \rightarrow 0}(x^3)$ permet de regrouper tous les termes qui sont, au pire, de l'ordre de x^3 . Cela concerne tous les termes en x^3 et tous les plus petits qui suivent (celui en x^4 , celui en x^5 etc.). D'ailleurs, on pouvait écrire :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O_{x \rightarrow 0}(x^4)$$

puisque le terme qui suit celui en x^2 dans ce développement limité est un terme en x^4 .

- Il est alors légitime de se poser la question de la présentation à privilégier. Le point précédent permet de comprendre que la notation $O_{x \rightarrow 0}(x^3)$ permet de « gagner un rang » par rapport à la notation $o_{x \rightarrow 0}(x^3)$, ce qui s'avère souvent utile.

□

2. Déterminer la nature de la série $\sum \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n e^n} \right) \right)$.

On commencera par déterminer un équivalent du terme général.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + O(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{donc} \quad -\cos(x) = -1 + \frac{1}{2} x^2 + O(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{donc} \quad 1 - \cos(x) = \frac{1}{2} x^2 + O(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{En particulier : } 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} x^2.$$

- Comme $\frac{1}{n e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit :

$$1 - \cos \left(\frac{1}{n e^n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{n e^n} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 e^{2n}}$$

Commentaire

- Il est précisé dans la question qu'il faut déterminer un équivalent de la suite $\left(1 - \cos \left(\frac{1}{n e^n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. L'équivalent :

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

est usuel et peut être utilisé directement. Il est aussi possible, comme détaillé dans la correction, de démontrer cet équivalent en détaillant le développement limité de la fonction $\exp$ au voisinage de 0.

- Il ne faut surtout pas écrire :

~~$$\cos \left(\frac{1}{n e^n} \right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{n^2 e^{2n}} \right) - 1$$~~

Si le résultat obtenu est correct, la manière d'y parvenir ne l'est pas. Il convient de retenir qu'on NE peut PAS sommer des équivalents. Si on est tenté de le faire, c'est certainement qu'il faut passer par un développement limité (comme cela est détaillé dans la correction).

- $\times \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$

$$\times 1 - \cos \left(\frac{1}{n e^n} \right) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{En effet : } \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2 e^{2n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{e^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- $\times$ La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série

$$\sum \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n e^n} \right) \right) \text{ est (absolument) convergente.}$$

Commentaire

- Le premier calcul d'équivalent permet d'obtenir une suite d'expression plus simple que $\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n e^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et qui a le même comportement asymptotique.
- Pour démontrer que la suite $\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n e^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est négligeable devant $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, il suffit alors de démontrer que la suite $\left(\frac{1}{2} \frac{1}{n^2 e^{2n}}\right)$ l'est.
- On aurait aussi pu utiliser la propriété :

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n e^n}\right) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{e^2}\right)^n \right)$$

en faisant ainsi apparaître le terme général d'une série géométrique de raison $\left|\frac{1}{e^2}\right| < 1$.

□

3. Dans la suite, on note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à coefficients réels.

- a) Démontrer que l'ensemble $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+1} - 3u_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

Démontrons que l'ensemble $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+1} - 3u_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

(i) $F \subset E$ par définition.

(ii) $F \neq \emptyset$ car $0_E \in F$.

En effet, si on note (u_n) la suite nulle (définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$), alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \times u_{n+1} - 3 \times u_n = 2 \times 0 - 3 \times 0 = 0$$

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Soit $((u_n), (v_n)) \in F^2$.

Il s'agit de démontrer : $\lambda \cdot (u_n) + \mu \cdot (v_n) = (\lambda \times u_n + \mu \times v_n) \in F$.

Notons (w_n) cette suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 2 \times w_{n+1} - 3 \times w_n &= 2 \times (\lambda \times u_{n+1} + \mu \times v_{n+1}) - 3 \times (\lambda \times u_n + \mu \times v_n) \\ &= 2\lambda \times u_{n+1} + 2\mu \times v_{n+1} - 3\lambda \times u_n - 3\mu \times v_n \\ &= \lambda \times (2u_{n+1} - 3u_n) + \mu \times (2v_{n+1} - 3v_n) \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 && (\text{car } (u_n) \in F \text{ et } (v_n) \in F) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi : $\lambda \cdot (u_n) + \mu \cdot (v_n) \in F$.

□

- b) L'ensemble $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+1} - 3u_n = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? Justifier.

Démonstration.

Notons (u_n) la suite nulle 0_E , c'est-à-dire la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.

$$2 \times u_1 - 3 \times u_0 = 2 \times 0 - 3 \times 0 = 0 \neq 1$$

Ainsi, $0_E \notin F$. Cela démontre que l'ensemble F n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Commentaire

Dans cette question, on démontre : $(u_n) \notin F$. Pour ce faire, on démontre que la propriété d'appartenance à F n'est pas vérifiée par la suite (u_n) . Autrement dit, on souhaite démontrer :

$$\text{NON}(\forall n \in \mathbb{N}, 2 \times u_{n+1} - 3 \times u_n = 1)$$

c'est-à-dire : $\exists i_0 \in \mathbb{N}, 2 \times u_{i_0+1} - 3 \times u_{i_0} \neq 1$.

Dans la démonstration, on se contente alors de démontrer : $2 \times u_{0+1} - 3 \times u_0 \neq 1$, ce qui est suffisant pour conclure. □