

Interrogation de cours 3

1. a) La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est-elle libre ? Justifier.

- b) Démontrer que la famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre. On exige ici l'utilisation de la méthode correspondant à la vérification de la définition de liberté.

2. On considère la famille $\mathcal{F} = (X + X^2, 1 - 2X + X^2)$.

- a) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Justifier.

- b) Peut-on trouver un vecteur $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que la famille $(X + X^2, 1 - 2X + X^2, R)$ (obtenue par concaténation des vecteurs de $\mathcal{F}$ et du vecteur R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Justifier.

3. On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

Déterminer une base de F et sa dimension (on justifiera).