

Interrogation de cours 3

1. a) La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est-elle libre ? Justifier.

Démonstration.

Comme : $\text{Card}(\mathcal{F}_1) = 4 > 3 = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$, la famille $\mathcal{F}_1$ n'est PAS une famille libre (elle est donc liée).

□

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre. On exige ici l'utilisation de la méthode correspondant à la vérification de la définition de liberté.

Démonstration.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

On suppose : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$.

$$\text{Or : } (*) \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \text{(par remontées successives)} \end{cases}$$

La famille $\mathcal{F}_2$ est donc libre.

□

2. On considère la famille $\mathcal{F} = (X + X^2, 1 - 2X + X^2)$.

a) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Justifier.

Démonstration.

La famille $\mathcal{F}$ est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires. Elle est donc libre.

□

- b) Peut-on trouver un vecteur $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que la famille $(X + X^2, 1 - 2X + X^2, R)$ (obtenue par concaténation des vecteurs de $\mathcal{F}$ et du vecteur R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Justifier.

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
Elle peut donc être complétée en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- De plus, toute base de $\mathbb{R}_2[X]$ est de cardinal 3 (puisque $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$).

On en conclut que la famille $\mathcal{F}$, de cardinal 2 peut être complétée en une base par adjonction d'un seul vecteur.

□

3. On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

Déterminer une base de F et sa dimension (on justifiera).

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$X \in F \iff (A - I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y = -z \\ -y = -z \end{cases} \quad (\text{en choisissant } z \text{ comme variable auxiliaire})$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -x = 0 \\ -y = -z \end{cases}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 0 \text{ et } y = z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× est libre car est constituée uniquement d'un vecteur non nul,

× engendre F (*on peut aussi dire : est génératrice de F*).

C'est donc une base de F .

On en conclut enfin : $\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 1$.

□