

Interrogation de cours 4

1. Que peut-on dire de la fonction $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$?

En déduire la dérivée de cette fonction.

Démonstration.

- La fonction g est LA primitive qui s'annule en 0 de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$.
- Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-x^2}$.

□

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \int_0^{x^2} e^{\sqrt{t+1}} dt$.

Démontrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Démonstration.

- La fonction $h : t \mapsto e^{\sqrt{t+1}}$ est continue sur $] -1, +\infty[$.
(on détermine ici l'intervalle de continuité de h indépendamment du reste de l'exercice)
Elle admet donc une primitive H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.
(on précise toujours le caractère $\mathcal{C}^1$ dès le début de l'exercice)
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition :

$$g(x) = \int_0^{x^2} e^{\sqrt{t+1}} dt = [H(t)]_0^{x^2} = H(x^2) - H(0)$$

La fonction $T : x \mapsto H(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle est LA composée $T = H \circ v$ où :

× $v : x \mapsto x^2$ est :

- de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
- telle que $v(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[\subset] -1, +\infty[$.

× H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.

On en déduit que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(la fonction g et la fonction T sont égales à une constante près)

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= T'(x) & (*) \\ &= (H \circ v)'(x) \\ &= (H' \circ v)(x) \times v'(x) \\ &= h(v(x)) \times v'(x) \\ &= h(x^2) \times 2x \\ &= e^{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Commentaire

L'étape (*) donne lieu à beaucoup d'erreurs, en particulier : $g'(x) \neq H'(x^2) - H'(0)$. En effet :

× il ne faut pas confondre $H'(v(x))$ et $(H \circ v)'(x)$.

× la fonction $w : x \mapsto H(0)$ est une fonction constante nulle de dérivée $w' : x \mapsto 0$ (et certainement pas $x \mapsto H'(0)$).

□

3. On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -X\}$.

Déterminer une base de F et sa dimension (on justifiera).

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
 X \in F & \iff (A + I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 & \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y = -2z \end{cases} \quad (\text{en choisissant } z \text{ comme variable auxiliaire}) \\
 & \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \iff \begin{cases} 2x = -2z \\ 2y = -2z \end{cases}
 \end{aligned}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned}
 F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = -z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) :$

× est libre car est constituée uniquement d'un vecteur non nul,

× engendre F (*on peut aussi dire : est génératrice de F*).

C'est donc une base de F .

On en conclut enfin : $\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 1$.

□