

Interrogation de cours 6

On note $\mathcal{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On définit l'application φ suivante : $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$$P \mapsto 2X P(X) - (X^2 - 1) P'(X)$$

Enfin, on note $R_0 = 1 + 2X + X^2$, $R_1 = 1 - 2X + X^2$ et $R_2 = 1 - X^2$.

1. Démontrer que φ est une application linéaire.

2. Déterminer $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ (les calculs ne sont pas attendus sur la copie).

3. a) Dédurre de la question précédente que la fonction φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Écrire la matrice représentative de φ dans la base $\mathcal{B}_1$.

c) Déterminer $\text{Im}(\varphi)$.

4. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$.

5. On admet, sans démonstration, que la famille $\mathcal{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

a) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. On la notera P .

b) Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$.

c) Donner le lien entre A , P et D .