

Interrogation de cours 6

On note $\mathcal{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On définit l'application φ suivante :

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \mapsto 2X P(X) - (X^2 - 1) P'(X)$$

Enfin, on note $R_0 = 1 + 2X + X^2$, $R_1 = 1 - 2X + X^2$ et $R_2 = 1 - X^2$.

1. Démontrer que φ est une application linéaire.

Démonstration.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.

$$\begin{aligned} & \varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) \\ = & 2X (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \\ & - (X^2 - 1) (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) \\ = & 2X (\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X)) && (\text{par linéarité de l'évaluation}) \\ & - (X^2 - 1) (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) && (\text{par linéarité de la dérivation}) \\ = & 2X (\lambda \cdot P(X) + \mu \cdot Q(X)) \\ & - (X^2 - 1) (\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)) && (\text{par linéarité de l'évaluation}) \\ = & \lambda \cdot (2X P(X)) + \mu \cdot (2X Q(X)) \\ & + \lambda \cdot (-(X^2 - 1) P'(X)) + \mu \cdot (-(X^2 - 1) Q'(X)) \\ = & \lambda \cdot (2X P(X) - (X^2 - 1) P'(X)) \\ & + \mu \cdot (2X Q(X) - (X^2 - 1) Q'(X)) \\ = & \lambda \cdot \varphi(P) + \mu \cdot \varphi(Q) \end{aligned}$$

L'application φ est donc linéaire.

Commentaire

- Dans l'énoncé, on écrit : $\varphi(P) = 2X P(X) - (X^2 - 1) P'(X)$.

Cette écriture est un léger abus de notation. De manière rigoureuse, on devrait faire la distinction entre les écritures R et $R(X)$ lorsqu'on désigne un élément de $\mathbb{R}[X]$. Plus précisément, on devrait définir φ comme l'application qui à un polynôme P associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par :

$$(\varphi(P))(X) = 2X P(X) - (X^2 - 1) P'(X)$$

On comprend aisément l'intérêt de l'abus de notation précédent qui permet d'éviter cette lourdeur d'écriture.

- C'est pour cela qu'on écrit : $\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)$ en lieu et place de $(\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q))(X)$. Pour plus de lisibilité, on s'autorise un tel abus dans la suite de l'exercice.

□

2. Déterminer $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ (les calculs ne sont pas attendus sur la copie).

Démonstration.

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\varphi(P_0))(X) &= 2X P_0(X) - (X^2 - 1) P_0'(X) \\ &= 2X \quad (\text{car } P_0'(X) = 0) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \varphi(P_0) = 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\varphi(P_1))(X) &= 2X P_1(X) - (X^2 - 1) P_1'(X) \\ &= 2X^2 - (X^2 - 1) \quad (\text{car } P_1'(X) = 1) \\ &= X^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \varphi(P_1) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\varphi(P_2))(X) &= 2X P_2(X) - (X^2 - 1) P_2'(X) \\ &= 2X^3 - (X^2 - 1) 2X \quad (\text{car } P_2'(X) = 2X) \\ &= 2X \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \varphi(P_2) = 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2.$$

□

3. a) Dédurre de la question précédente que la fonction φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ (c'est-à-dire : $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$)

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \varphi(a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2) \\ &= a_0 \cdot \varphi(P_0) + a_1 \cdot \varphi(P_1) + a_2 \cdot \varphi(P_2) \quad (\text{par linéarité de } \varphi) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \deg(\varphi(P)) &\leq \max(\deg(\varphi(P_0)), \deg(\varphi(P_1)), \deg(\varphi(P_2))) \\ &= \max(\deg(2X), \deg(X^2 + 1), \deg(2X)) \\ &= \max(1, 2, 1) \end{aligned}$$

Finalement : $\deg(\varphi(P)) \leq 2$ et ainsi : $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

L'application φ est linéaire ET à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.
C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Commentaire

- Dans l'énoncé, la fonction φ est présentée avec $\mathbb{R}_2[X]$ comme ensemble de départ et d'arrivée. Pour autant, cela ne consiste en rien en une démonstration. Il est donc important de démontrer que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Autrement dit, il faut démontrer : $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Commentaire

- Démontrer qu'une application est à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$ est parfois très simple. Considérons par exemple l'application :

$$\begin{aligned}\psi &: \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P &\mapsto X P'(X+1) - X^2 P''(X)\end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$ (c'est-à-dire pour tout polynôme P) coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $\deg(P) \leq 2$:

$$\deg(X P'(X+1) - X^2 P''(X)) \leq \max(\deg(X P'(X+1)), \deg(X^2 P''(X)))$$

Or :

$$\times \deg(X P'(X+1)) = \deg(X) + \deg(P'(X+1)) = 1 + \deg(P'(X)) \leq 1 + 1 = 2,$$

$$\times \deg(X^2 P''(X)) = \deg(X^2) + \deg(P''(X)) = 2 + \deg(P''(X)) \leq 2 + 0 = 2.$$

Ainsi : $\deg(\psi(P)) \leq 2$.

- Une telle démonstration n'aboutirait pas pour cet exercice. En effet, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\deg(P) \leq 2, \quad \deg(P') \leq 1 \quad \text{et} \quad \deg(P'') \leq 0$$

(rappelons au passage qu'un polynôme de degré 0 est un polynôme constant **non nul** ; un polynôme de degré au plus 0 est donc un polynôme constant éventuellement nul)

On procède comme dans le point précédent. Tout d'abord :

$$\times \deg(2 X P(X)) \leq 1 + 2 = 3,$$

$$\times \deg(-(X^2 - 1) P'(X)) \leq 2 + 1 = 3,$$

On en déduit : $\deg(\varphi(P)) \leq 3$ ce qui démontre :

$$\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_3[X]$$

Pour démontrer la propriété : $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$ (qui ne contredit pas celle au-dessus) on doit alors faire une démonstration plus détaillée comme celle du corrigée.

- On pouvait aussi écrire :

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= \varphi(a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2) \\ &= a_0 \cdot \varphi(P_0) + a_1 \cdot \varphi(P_1) + a_2 \cdot \varphi(P_2) && (\text{par linéarité de } \varphi) \\ &= a_0 \cdot (2 X P_0(X) - \cancel{(X^2 - 1) P_0'(X)}) \\ &\quad + a_1 \cdot (2 X P_1(X) - (X^2 - 1) P_1'(X)) \\ &\quad + a_2 \cdot (2 X P_2(X) - (X^2 - 1) P_2'(X)) \\ &= 2 a_0 \cdot X \\ &\quad + a_1 \cdot (2 X X - (X^2 - 1)) \\ &\quad + a_2 \cdot (2 X X^2 - (X^2 - 1) 2 X) \\ &= 2 a_0 \cdot X + a_1 \cdot (2 X^2 - X^2 + 1) + a_2 \cdot (\cancel{2 X^2} - \cancel{2 X^3} + 2 X) \\ &= a_1 + (2 a_0 + 2 a_2) X + a_1 X^2\end{aligned}$$

Commentaire

- Les points précédents mettent en avant certaines propriétés (à connaître !) sur le degré des polynômes. Plus précisément, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors :

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

□

b) Écrire la matrice représentative de φ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Démonstration.

D'après la question 2 :

$$\times \varphi(P_0) = 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2. \text{ On en conclut : } \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(\varphi(P_0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\times \varphi(P_1) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2. \text{ On en conclut : } \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(\varphi(P_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\times \varphi(P_2) = 0 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2. \text{ On en conclut : } \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(\varphi(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en conclut : } \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

c) Déterminer $\text{Im}(\varphi)$.

Démonstration.

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2)) = \text{Vect}(2X, 1 + X^2, 2X) = \text{Vect}(2X, 1 + X^2).$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $\text{Im}(\varphi)$, image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Si P et $U = \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P , cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2}_{\in \mathbb{R}_2[X]} \neq \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\text{Vect}(P_0 + P_2)}_{\subset \text{Ker}(\varphi)} \neq \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{\subset \text{Ker}(A)}$$

□

4. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$.

Démonstration.

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

Notons alors $U = \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
 &\iff AU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_0 + 2a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} 2a_0 + 2a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} 2a_0 + 2a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2a_0 = -2a_2 \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{en choisissant } a_2 \text{ comme variable auxiliaire})
 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(\varphi) &= \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid (\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]})\} \\
 &= \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 = -a_2 \text{ et } a_1 = 0\} \\
 &= \{-a_2 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_2 \mid a_2 \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{a_2 \cdot (-P_0 + P_2) \mid a_2 \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}(-P_0 + P_2)
 \end{aligned}$$

$\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(X^2 - 1)$

Commentaire

- Il est aussi possible d'utiliser la remarque de la question 3.a). Plus précisément :

$$\begin{aligned}
 P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
 &\iff a_1 \cdot P_0 + (2a_0 + 2a_2) \cdot P_1 + a_1 \cdot P_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
 &\iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_0 + 2a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(ce qu'on appelle identification en première année n'est autre que la propriété d'unicité de l'écriture d'un polynôme comme CL des vecteurs la famille **libre** (P_0, P_1, P_2)) □

5. On admet, sans démonstration, que la famille $\mathcal{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

a) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. On la notera P .

Démonstration.

$$\begin{aligned} \bullet \quad R_0(X) &= 1 + 2X + X^2 \\ &= 1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2 \end{aligned}$$

$$\text{On en conclut : } \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(R_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad R_1(X) &= 1 - 2X + X^2 \\ &= 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2 \end{aligned}$$

$$\text{On en conclut : } \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(R_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad R_2(X) &= 1 - X^2 \\ &= 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2 \end{aligned}$$

$$\text{On en conclut : } \text{Mat}_{(P_0, P_1, P_2)}(R_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement : $P = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

□

b) Déterminer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\varphi(R_0))(X) &= 2X R_0(X) - (X^2 - 1) R'_0(X) \\ &= 2X (1 + 2X + X^2) - (X^2 - 1) (2 + 2X) \\ &= 2X + 4X^2 + \cancel{2X^3} - 2X^2 + 2 - \cancel{2X^3} + 2X \\ &= 2 + 4X + 2X^2 \\ &= 2 (1 + 2X + X^2) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \varphi(R_0) = 2 \cdot R_0 + 0 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2.$$

$$\text{On en conclut : } \text{Mat}_{(R_0, R_1, R_2)}(\varphi(R_0)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\varphi(R_1))(X) &= 2X R_1(X) - (X^2 - 1) R'_1(X) \\ &= 2X (1 - 2X + X^2) - (X^2 - 1) (-2 + 2X) \\ &= 2X - 4X^2 + \cancel{2X^3} + 2X^2 - 2 - \cancel{2X^3} + 2X \\ &= -2 + 4X - 2X^2 \\ &= -2 (1 - 2X + X^2) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \varphi(R_1) = 0 \cdot R_0 - 2 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2.$$

$$\text{On en conclut : } \text{Mat}_{(R_0, R_1, R_2)}(\varphi(R_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad (\varphi(R_2))(X) &= 2X R_2(X) - (X^2 - 1) R_2'(X) \\
 &= 2X (1 - X^2) - (X^2 - 1) (-2X) \\
 &= 2X - \cancel{2X^3} + \cancel{2X^3} - 2X \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\varphi(R_2) = 0 \cdot R_0 + 0 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$.

On en conclut : $\text{Mat}_{(R_0, R_1, R_2)}(\varphi(R_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Finalement : $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

c) Donner le lien entre A , P et D .

Démonstration.

Par formule de changement de base :

$$\begin{aligned}
 \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi) &= P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi) \times P_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} \\
 &= P \times D \times P^{-1}
 \end{aligned}$$

$A = P \times D \times P^{-1}$

□

Prenons un peu de recul ...

- Dans cet exercice, on étudie un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Dans le cours, on a vu que lorsque l'on travaille sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, les endomorphismes « ne sont autres que les matrices carrées d'ordre n ». L'endomorphisme φ est naturellement représenté par la matrice A . Plus précisément, A est la matrice représentative de φ dans la base canonique $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Il est naturel de se poser la question de l'existence d'une base dans laquelle la matrice de φ s'exprimerait de manière simple. En particulier, on s'interroge sur l'existence d'une base dans laquelle la matrice de φ serait diagonale. Il est intéressant de remarquer qu'une telle base de polynômes $(R_0, R_1, R_2) \in (\mathbb{R}_2[X])^3$ vérifie :

$$\text{Mat}_{(R_0, R_1, R_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \varphi(R_i) = \mu_i R_i$$

- Cet exercice permet d'introduire tous les objets que l'on va rencontrer lors du chapitre de réduction des endomorphismes :
 - × les scalaires λ qui vérifient la propriété : $\exists R \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}, \varphi(R) = \lambda \cdot R$, sont appelés les valeurs propres de l'endomorphisme φ .
 - × les polynômes non nuls R tels que $\varphi(R) = \lambda \cdot R$ sont des vecteurs propres de l'endomorphisme φ associés à la valeur propre λ .
 - × s'il existe une base dans laquelle la matrice représentative de φ est diagonale, on dit que l'endomorphisme est diagonalisable.
 - × s'il existe une base dans laquelle la matrice représentative de φ est triangulaire, on dit que l'endomorphisme est trigonalisable.