

Interrogation de cours 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} dt$.

1. À l'aide du théorème de convergence dominée, déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Démonstration.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en x »

- Pour tout $t_0 \in [0, +\infty[$, la fonction $h_{t_0} : x \mapsto \sin\left(\frac{t_0}{x}\right) e^{-t_0}$ admet une limite finie en $+\infty$.
Plus précisément :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{t_0}{x}\right) e^{-t_0} = \sin(0) \times e^{-t_0} = 0$$

- La fonction $\ell : t \mapsto 0$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Pour tout $x \in]1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
► Soit $x \in]1, +\infty[$. Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} |h_t(x)| &= \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right| \\ &= \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) \right| \times |e^{-t}| \\ &= \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) \right| \times e^{-t} \\ &\leq 1 \times e^{-t} \end{aligned}$$

Et la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. En effet :

× la fonction φ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

× l'intégrale $\int_0^{+\infty} |e^{-t}| dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre 1 (> 0).

Alors, par théorème de convergence dominée (à paramètre continu), la fonction f admet une limite en $+\infty$ donnée par :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$$

Commentaire

- Dans la question, on doit déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. L'hypothèse de domination doit alors être effectuée sur n'importe quel intervalle dont la plus grande borne est $+\infty$. Ici, on fait le choix $x \in]1, +\infty[$ mais on aurait aussi pu choisir de travailler sur l'intervalle $[0, +\infty[$ ou encore $[1, +\infty[$ (par exemple).
- Cela ne signifie **EN AUCUN CAS** que l'on peut effectuer la domination sur tout segment (comme on le fait pour les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre). Comme signalé au-dessus, le seul critère est de considérer un intervalle dont l'une des bornes est $+\infty$ (puisque l'on recherche une limite en $+\infty$). Les intervalles $[10, +\infty[$, $[50, +\infty[$ ou $[100, +\infty[\dots$ peuvent aussi convenir.
- On pouvait aussi obtenir ce résultat par théorème d'encadrement.
Plus précisément, pour tout $x > 0$:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right| = \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) \right| \times e^{-t} \leq \left| \frac{t}{x} \right| \times e^{-t} = \frac{t}{x} \times e^{-t}$$

On en conclut, par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant), les intégrales en présence étant convergentes :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right| dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$$

Or :

$$\times 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\times \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right| dt = 0$.

Pour conclure, il faut alors remarquer que par inégalité triangulaire :

$$0 \leq \left| \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right| dt$$

et utiliser de nouveau le théorème d'encadrement.

- Il est légitime de se poser la question de la manière qui doit être privilégiée. Il convient de choisir celle qu'on sait mener au bout. Celle par encadrement permet d'éviter d'utiliser un théorème aux hypothèses complexes mais requiert une prise d'initiative lors de la majoration. On doit trouver une expression qui dépend de x et dont l'intégrale tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$ mais qui dépend aussi de t afin que l'on conserve l'intégrabilité. L'utilisation du théorème de convergence dominée (à paramètre continu) exige moins d'initiative car il suffit de dérouler les différentes hypothèses de ce théorème. La difficulté réside alors dans la domination (indépendamment de x) qui est plus ou moins difficile à obtenir suivant les exercices. □

2. Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

- $\forall t \in [0, +\infty[, e^{-t} \geq 0$

$$\times \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right| = \left| \sin\left(\frac{t}{x}\right) \right| e^{-t} = O_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t})$$

- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre 1 (> 0).

Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} dt$ est absolument convergente.

Commentaire

- Dans la question 1., on utilise le théorème de convergence dominée. Dans celui-ci, on établit l'hypothèse de domination (indépendamment de x). Plus précisément, on écrit :

$$|\underline{h}_t(x)| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

Comme la fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$, cela démontre au passage que la fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- On pouvait réutiliser ce résultat dans cette question. La présentation choisie ici est différente afin d'insister sur le fait que l'hypothèse de domination, même si elle permet d'obtenir l'intégrabilité, est plus contraignante (cela demande **une majoration** par une fonction intégrable sur I et dont l'expression ne dépend pas de x) que les démonstrations d'intégrabilité plus générales. □

3. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer f' sous forme intégrale.

Démonstration.

(i) Caractère $\mathcal{C}^1$ - étude « en x »

- Pour tout $t_0 \in [0, +\infty[$, la fonction $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto e^{-t_0} \sin\left(t_0 \times \frac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\underline{h}_{t_0}'(x) = -\frac{t_0}{x^2} \cos\left(\frac{t_0}{x}\right) e^{-t_0}$$

(ii) Intégrabilité - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

(0) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question précédente.

- Intégrabilité par domination

(1) ► Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{t_0}{x}\right) e^{-t_0}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

► Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. On suppose $a < b$.

Soit $x \in [a, b]$. Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \underline{h}_t'(x) &= \left| \frac{-t}{x^2} \cos\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right| \\ &= \left| \frac{-t}{x^2} \right| \times \left| \cos\left(\frac{t}{x}\right) \right| \times |e^{-t}| \\ &= \frac{t}{x^2} \left| \cos\left(\frac{t}{x}\right) \right| e^{-t} \\ &\leq \frac{t}{x^2} e^{-t} \quad \left(\text{car } \left| \cos\left(\frac{t}{x}\right) \right| \leq 1 \right) \\ &\leq \frac{1}{a^2} t e^{-t} \quad (*) \end{aligned}$$

Et la fonction $\psi : t \mapsto \frac{t}{a^2} e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(l'inégalité $(*)$ démontre au passage que pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{-1}{x^2} \cos\left(\frac{t}{x}\right) t e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$)

L'inégalité $(*)$ s'obtient en remarquant que pour tout $x \in [a, b]$:

$$a \leq x \leq b$$

$$\text{donc} \quad a^2 \leq x^2 \leq b^2 \quad \left(\text{par croissance de la fonction élévation au carré sur } [0, +\infty[\right)$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{a^2} \geq \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{b^2} \quad \left(\text{par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\right)$$

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle du type $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et donc sur $]0, +\infty[$.

De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) &= \int_0^{+\infty} \underline{h}_t'(x) \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{-t}{x^2} \cos\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \right) \, dt \end{aligned}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} \int_0^{+\infty} t \cos\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \, dt$$

Commentaire

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

Pour tout $(a, b) \in A^2$ (avec $a < b$), il existe une fonction $\varphi_{a,b}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in I, \quad |h'_t(x)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

- Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a, b]$ produit une fonction $\varphi_{a,b}$ dont l'expression fait apparaître a et b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de φ ne dépend que de a , alors on peut préférer faire l'hypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a, \beta]$ où β est la borne haute de A . C'est ce qui est réalisé dans la question où l'hypothèse de domination est réalisée sur tout intervalle de type $[a, +\infty[$.
- Pour démontrer l'inégalité (*), on se sert du fait que la fonction élévation au carré est croissante sur $[0, +\infty[$. Il arrive parfois que l'on ait à travailler sur $\mathbb{R}$ et pas sur $[0, +\infty[$. Dans ce cas, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité :

$$a \leq x \leq b$$

ne permet pas de conclure : $a^2 \leq x^2 \leq b^2$ (on obtient une égalité fausse dans le cas $a = -2$ et $b = 1$ par exemple). Pour s'en sortir, il suffit de remarquer :

$$\min(|a|, |b|) \leq |x| \leq \max(|a|, |b|)$$

Toutes les quantités étant positives, on peut alors appliquer la fonction élévation au carré de part et d'autre sans que cela ne change les symboles d'inégalité.

□