

## Interrogation de cours 8

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2} dt$ .

1. À l'aide du théorème de convergence dominée, déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

2. Le but de l'exercice est de démontrer :  $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

- a) Écrire la quantité  $\frac{1}{1-t}$  sous forme d'une somme infinie en précisant pour quelle valeur de  $t$  cette égalité est vérifiée.

- b) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Que vaut :  $\lim_{t \rightarrow 0} t^k \ln(t)$  ? (on n'attend pas d'argument)

Démontrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_k : t \mapsto t^k \ln(t)$  est intégrable sur  $[0, 1]$ .

c) Démontrer :  $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^k \ln(t) dt = -\frac{1}{(k+1)^2}$ .

d) Pour tout  $t_0 \in [0, 1]$ , démontrer que la série numérique  $\sum t_0^n \ln(t_0)$  est convergente.

e) Démontrer, **à l'aide du théorème d'intégration terme à terme**, le résultat souhaité.  
On prendra soin de citer les hypothèses avec précision.