

Interrogation de cours 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2} dt$.

1. À l'aide du théorème de convergence dominée, déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : t \mapsto \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2}$.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- Pour tout $t_0 \in [0, +\infty[$, la suite **numérique** $(f_n(t_0))$ est convergente, de limite :

$$f(t_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{t_0}{n}}}{1+t_0^2} = \frac{e^0}{1+t_0^2} = \frac{1}{1+t_0^2}$$

Cela démontre que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

- La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|f_n(t)| = \frac{|e^{-\frac{t}{n}}|}{|1+t^2|} = \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

De plus, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(cette inégalité démontre donc au passage que la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$)

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt &= [\arctan(t)]_0^{+\infty} \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t) \right) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

□

2. Le but de l'exercice est de démontrer : $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

a) Écrire la quantité $\frac{1}{1-t}$ sous forme d'une somme infinie en précisant pour quelle valeur de t cette égalité est vérifiée.

Démonstration.

$$\forall t \in]-1, 1[, \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k$$

□

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Que vaut : $\lim_{t \rightarrow 0} t^k \ln(t)$? (on n'attend pas d'argument)

Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_k : t \mapsto t^k \ln(t)$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^k \ln(t) = 0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_k : t \mapsto t^k \ln(t)$:
 $\times$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$.
 $\times$ admet une limite finie en 0.

Ainsi, la fonction f_k est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_k(0) = 0$.

La fonction ainsi prolongée est continue sur le SEGMENT $[0, 1]$ et donc intégrable sur $[0, 1]$. □

c) Démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^k \ln(t) dt = -\frac{1}{(k+1)^2}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^k \ln(t) dt \\ &= \frac{1}{k+1} \left[t^{k+1} \ln(t) \right]_0^1 - \frac{1}{k+1} \int_0^1 t^{k+1} \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{k+1} \left(\cancel{1^{k+1} \ln(1)} - \left(\lim_{t \rightarrow 0} \cancel{t^{k+1} \ln(t)} \right) \right) - \frac{1}{k+1} \int_0^1 t^k dt \\ &= -\frac{1}{k+1} \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \right]_0^1 \end{aligned}$$

(le crochet généralisé étant convergent, les deux intégrales sont de même nature et sont donc convergentes d'après 2.b))

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^k \ln(t) dt = -\frac{1}{(k+1)^2}$$

Commentaire

- En 2.b) on démontre que la fonction f^k est intégrable sur $[0, 1]$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Il faudrait aussi le faire en $k = 0$. Le programme officiel autorise à affirmer, sans démonstration, que la fonction $\ln$ est intégrable en 0.
- On peut aussi utiliser la seconde intégrale. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^k$ est continue sur le SEGMENT $[0, 1]$ donc intégrable sur ce segment. □

d) Pour tout $t_0 \in]0, 1]$, démontrer que la série numérique $\sum t_0^n \ln(t_0)$ est convergente.

Démonstration.

Soit $t_0 \in [0, 1[$. Deux cas se présentent.

- Si $t_0 = 1$: $1^n \ln(1) = 0$.

La série $\sum 0$ est convergente.

- Si $t_0 \in]0, 1[$:

$$\times \forall n \in \mathbb{N}, t_0^n \geq 0$$

$$\times |t_0^n \ln(t_0)| = |t_0|^n \times |\ln(t_0)| = t_0^n \times |\ln(t_0)| = O_{n \rightarrow +\infty}(t_0^n)$$

$\times$ La série $\sum t_0^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $t_0 \in]0, 1[$.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum t_0^n \ln(t_0)$ est (absolument) convergente.

Pour tout $t_0 \in]0, 1]$, la série $\sum t_0^n \ln(t_0)$ est convergente.

□

e) Démontrer, **à l'aide du théorème d'intégration terme à terme**, le résultat souhaité.

On prendra soin de citer les hypothèses avec précision.

Démonstration.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

► D'après la question 2.d), pour tout $I =]0, 1[$ la série $\sum f_n(t)$ est convergente.

► De plus, la fonction $S : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \ln(t) = \ln(t) \times \sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{\ln(t)}{1-t}$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$.

(ii) Intégrabilité - étude « en t »

D'après la question 2.b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $]0, 1[$.

(iii) Hypothèse spécifique

Remarquons :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(t)| dt &= \int_0^1 |t^n \ln(t)| dt \\ &= \int_0^1 t^n \times |\ln(t)| dt \\ &= \int_0^1 t^n \times (-\ln(t)) dt \quad (\text{car } \ln(t) < 0 \text{ si } t \in]0, 1[) \\ &= - \int_0^1 t^n \ln(t) dt \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \quad (\text{d'après la question 2.c)}) \end{aligned}$$

La série numérique $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente.

On en conclut, par théorème d'intégration terme à terme que la fonction S est intégrable sur $]0, 1[$. De plus :

$$\begin{aligned}\int_{]0,1[} S(t) \, dt &= \int_0^1 S(t) \, dt \\&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln(t) \right) dt \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 t^n \ln(t) \, dt \right) \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(n+1)^2} \\&= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Finalement : $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} \, dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$

□