

Interrogation de cours 9

On note $E = \mathbb{R}^3$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. L'endomorphisme f est-il bijectif?
Que peut-on en déduire ?

Démonstration.

Remarquons :

$$\det(f) = \det(A) = 0 \quad (\text{en effet, la matrice } A \text{ est non inversible puisque ses deux premières colonnes sont opposées})$$

On en déduit que 0 est valeurs propre de f .

□

2. Démontrer : $\chi_f(X) = X(X+1)^2$.

On attend les calculs sur la feuille (il n'est pas nécessaire de mentionner les opérations effectuées).

Démonstration.

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \chi_{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}(X) \\ &= \det \left(X I_3 - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \right) \\ &= \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 1 \\ 1 & X-1 & 2 \\ 1 & -1 & X+2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & X+2 \\ 1 & X-1 & 2 \\ X+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (X+1)L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & X+2 \\ 0 & X & -X \\ 0 & -1 - (X+1)(-1) & 1 - (X+1)(X+2) \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} X & -X \\ X & -1 - 3X - X^2 \end{vmatrix} \quad (\text{en développant par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne}) \\ &= -X \begin{vmatrix} 1 & -X \\ 1 & -1 - 3X - X^2 \end{vmatrix} \\ &= -X \left((-1 - 3X - X^2) + X \right) \\ &= \cancel{-X} \left(\cancel{-1} \right) (X^2 + 2X + 1) \end{aligned}$$

Ainsi : $\chi_f(X) = X(X^2 + 2X + 1) = X(X+1)^2$.
On en déduit : $\text{Sp}(f) = \{0, -1\}$.

□

3. Déterminer $\dim(E_0(f))$.

Démonstration.

Remarquons :

$$1 \leq \dim(E_0(f)) \leq m_0(f) = 1$$

Ainsi : $\dim(E_0(f)) = 1$.

□

4. a) Déterminer $E_{-1}(f)$ (selon la méthode de votre choix).

Démonstration.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 u \in E_{-1}(f) &\iff (f + \text{id}_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff (A + I_3) U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} -x + 2y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} -x + 2y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x + 2y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x + 2y = 2z \\ y = z \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} -x = 0 \\ y = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_{-1}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = z\} \\
 &= \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{z \cdot (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((0, 1, 1))
 \end{aligned}$$

$E_{-1}(f) = \text{Vect}((0, 1, 1))$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda I_3$.
Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = -1$.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_{-1}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A + I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Or :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3$$

$$= x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut choisir $y = z$ et donc $x = 0$ (on remarque $C_3 = -C_2$).

En prenant par exemple $z = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$ et ainsi :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset E_{-1}(A)$$

Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) & = & \dim(E_{-1}(A)) & + & \text{rg}(A + I_3) \\ \parallel & & & & \parallel \\ 3 & & & & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{(par un calcul rapide à l'aide} \\ \text{de l'algorithme du pivot)} \end{array}$$

Ainsi : $\dim(E_{-1}(A)) = 3 - 2 = 1$ et l'égalité annoncée est vérifiée. □

b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) ?

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F} = ((0, 1, 1))$ est :
 - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.
 - × génératrice de $E_{-1}(f)$.

La famille $((1, 1, 1))$ est donc une base de $E_{-1}(f)$.

- On en conclut en particulier :

$$\dim(E_{-1}(f)) = 1 \neq 2 = m_{-1}(f)$$

Ainsi, l'endomorphisme f n'est PAS diagonalisable. □

18/11/2025

- Dans cet exercice, on considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n = 5$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .
- On suppose : $f^3 = 3f^2 - 2f$.

5. Déterminer un polynôme annulateur de f .

Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de f ?

Démonstration.

Le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X^2 - 3X + 2) = X(X - 1)(X - 2)$ est un polynôme annulateur de f .

$$\text{Sp}(f) \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{racines de } P, \text{ polynôme} \\ \text{annulateur de } f \end{array} \right\} = \{0, 1, 2\}$$

□

6. Démontrer que f est diagonalisable.

Démonstration.

Le polynôme P est un polynôme annulateur de f scindé à racines simples. On en déduit que f est diagonalisable.

□