**Nom et prénom** : PSI

Mathématiques

# Interrogation 10

- Dans cet exercice, on considère une infinité d'urnes qui portent chacune un numéro entier non nul. On suppose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'urne $k$ contient :
  - × $k$ boules noires.
  - × 1 boule blanche.
- On effectue alors une infinité de lancers d'une pièce qui amène Pile avec probabilité $p \in ]0,1[$ et on note le rang d'obtention du premier Pile.
- L'expérience se poursuit alors par un tirage effectué dans l'urne portant le numéro de ce rang d'obtention (par exemple, si on obtient Pile pour la première fois au rang 3, on pioche une boule dans l'urne 3).
- On note :
  - × $X$ la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur le rang d'apparition du premier Pile.
  - × $A$ l'événement « obtenir une boule blanche lors de l'expérience ».

***1.*** ***a)*** Reconnaître la loi de $X$ (**la rédaction du cours est attendue**).

***b)*** Rappeler alors l'espérance et la variance de $X$ (sans justification).

***c)*** Déterminer le moment d'ordre 2 de $X$ (c'est-à-dire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$).

***2.*** Exhiber un système complet d'événements associé à l'expérience (on n'attend pas de justification).

**3. a)** Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}\big(A \mid \{X = i\}\big)$ (**la rédaction du cours est attendue**).

**b)** Déterminer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de $p$.

Le résultat devra être simplifié à l'aide de la formule : $\forall x \in \,]0,1[, \ \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dfrac{x^i}{i+1} = -\dfrac{\ln(1-x)+x}{x}$.

**c)** Dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$, conclure : $\mathbb{P}(A) = 2\ \ln(2) - 1$.