Interrogation de cours 10

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \dfrac{x}{1+n^4\,x^4}$.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$.
  La série $\sum 0$ est convergente.
- Si $x_0 \in \mathbb{R}^*$ alors :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{|x_0|^3}\ \dfrac{1}{n^4} \geqslant 0$
  × $\left| \dfrac{x_0}{1+n^4\,{x_0}^4} \right| = \dfrac{|\,x_0\,|}{1+n^4\,|\,x_0\,|^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|\,x_0\,|}{|\,x_0\,|^4\,n^4} = \dfrac{1}{|x_0|^3}\ \dfrac{1}{n^4}$
  × Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^4}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 4 (> 1).

  On en déduit que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est (absolument) convergente.

$$\boxed{\text{Finalement, la série numérique } \sum f_n(x) \text{ est convergente pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

Commentaire

- Il est important de bien comprendre les objets et en particulier de différencier les séries $\sum f_n$ et $\sum f_n(x_0)$ qui représentent des objets différents.

$\sum f_n$	$\sum f_n(x_0)$
C'est une **série de fonctions**. Autrement dit, c'est la **suite de fonctions** (S_n) de terme général $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$.	C'est une **série numérique**. Autrement dit, c'est la **suite numérique** $\big(S_n(x_0)\big)$ de terme général $S_n(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x_0)$.

  La notation x_0 a un intérêt pédagogique (utilisée dans le corrigé mais pas dans l'énoncé qui préfère la notation x). Elle a pour but d'insister sur le fait que cet élément est fixé ce qui permet de mettre en avant que $\sum f_n(x_0)$ est une série numérique et pas une série de fonctions.
- Étudier la convergence simple d'une série de fonctions sur un intervalle I, c'est étudier la nature de la série numérique $\sum f_n(x_0)$ pour tout x_0 élément de I. Il est donc logique qu'une telle étude donne lieu à l'utilisation des méthodes listées dans le chapitre sur les séries numériques (notamment les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs).
- Il ne faut pas confondre non plus S qui est une fonction et $S(x)$ qui est une quantité (dépendante de x). Il convient de bien lire l'énoncé sur ce point : comme précisé plus haut, la série $\sum f_n(x)$ est une série numérique. Sa somme, lorsqu'elle est bien définie, est une quantité dépendant de x, généralemet notée $S(x)$.

□

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose $0 < a < b$.

a) Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |\, f_n(x) \,| &= \left| \frac{x}{1+n^4\, x} \right| \\ &= \frac{|\, x\,|}{1+n^4\, |\, x\,|^4} \\ &= \frac{x}{1+n^4\, x^4} && \textit{(car } x \geqslant a > 0\textit{)} \\ &\leqslant \frac{b}{1+n^4\, x^4} && \textit{(car } x \leqslant b\textit{)} \\ &\leqslant \frac{b}{1+n^4\, a^4} && (*) \end{aligned}$$

En effet, pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{array}{llllll} & a & \leqslant & x & \leqslant & b \\ \text{donc} & a^4 & \leqslant & x^4 & \leqslant & b^4 \quad \textit{(car la fonction élévation à la puissance } 4 \textit{ est croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{donc} & n^4\, a^4 & \leqslant & n^4\, x^4 & \leqslant & n^4\, b^4 \quad \textit{(par multiplication par } n^4 \geqslant 0\textit{)} \\ \text{donc} & 1+n^4\, a^4 & \leqslant & 1+n^4\, x^4 & \leqslant & 1+n^4\, b^4 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{1+n^4\, a^4} & \geqslant & \dfrac{1}{1+n^4\, x^4} & \geqslant & \dfrac{1}{1+n^4\, b^4} \quad \textit{(car la fonction inverse est décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

On conclut par $(*)$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur $[a,b]$. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \|\, f_n \,\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{b}{1+n^4\, a^4}$$

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^4} \geqslant 0$

× $\|\, f_n \,\|_{\infty,[a,b]} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

× La série $\sum \dfrac{1}{n^4}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 4 (> 1).

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique } \sum \|\, f_n \,\|_{\infty,[a,b]} \text{ est convergente.}}$$

□

b) Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\begin{aligned} |\, f_n(x) \,| &= \left| \frac{x}{1 + n^4\, x} \right| \\ &= \frac{x}{1 + n^4\, x^4} \\ &\leqslant \frac{x}{n^4\, x^4} && \textit{(car } 1 + n^4\, x^4 \geqslant n^4\, x^4 \textit{)} \\ &= \frac{1}{n^4\, x^3} \\ &\leqslant \frac{1}{n^4\, a^3} && \textit{(car } x \geqslant a \textit{ donc } x^3 \geqslant a^3 \textit{ et } \tfrac{1}{x^3} \leqslant \tfrac{1}{a^3} \textit{)} \end{aligned}$$

  On en conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur $[a, +\infty[$. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \ \leqslant\ \|\, f_n \,\|_{\infty,[a,+\infty[} \ \leqslant\ \frac{1}{a^4\, n^4}$$

  × $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^4} \geqslant 0$

  × $\|\, f_n \,\|_{\infty,[a,+\infty[} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

  × La série $\sum \dfrac{1}{n^4}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 4 (> 1).

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum \|\, f_n \,\|_{\infty,[a,+\infty[}$ est convergente.

□

3. Démontrer que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

(i) $\boxed{\text{Caractère } \mathscr{C}^0}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$.

(ii) $\boxed{\text{Convergence uniforme}}$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout intervalle $[a, +\infty[$ de $]0, +\infty[$.

Ainsi, la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ de $]0, +\infty[$ et donc sur $]0, +\infty[$.

□

4. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
On pourra s'intéresser à la série numérique $\sum f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) \;=\; \frac{\frac{1}{n}}{1 + n^4\ \left(\frac{1}{n}\right)^4} \;=\; \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{n^4}{n^4}} \;=\; \frac{1}{2\,n}$$

- On procède par l'absurde.
On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \;\leqslant\; f_n\left(\frac{1}{n}\right) \;\leqslant\; \|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[}$$

Ainsi :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \;\geqslant\; \dfrac{1}{2\,n} \geqslant 0$

× La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2\,n}$ est divergente en tant que série de Riemann d'exposant 1 ($\not> 1$).

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, laa série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[}$ est divergente. Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, la série de fonctions } \sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } [0, +\infty[}$$

□