

---

## Interrogation de cours 11

---

On considère la fonction  $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$ . On note par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$f_n : x \mapsto (-1)^n \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$$

1. Soit  $\alpha < 0$ . Démontrer que la série numérique  $\sum (-1)^n \frac{e^{-\alpha\sqrt{n}}}{n}$  est divergente.

2. Démontrer que la fonction  $S$  est définie sur  $[0, +\infty[$ .

3. Démontrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

4. Démontrer que  $S$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

5. Citer la condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions. Signaler un cas pour lequel cette condition nécessaire est aussi suffisante.