Interrogation de cours 12

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par :

$$\begin{array}{rccccl} \langle \cdot, \cdot \rangle & : & \mathbb{R}_2[X] & \times & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P & , & Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0) \times Q^{(k)}(0)}{\big(k!\big)^2} \end{array}$$

1. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ (*on notera dans la suite* $\| \cdot \|$ *la norme associée à ce produit scalaire*).

Démonstration.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique
  Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} \langle Q, P \rangle &= \sum_{k=0}^{2} \frac{Q^{(k)}(0) \times P^{(k)}(0)}{\big(k!\big)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0) \times Q^{(k)}(0)}{\big(k!\big)^2} && \textit{(car la loi } \times \textit{ est commutative)} \\ &= \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite
  Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$.
  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} \langle P, \mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 \rangle &= \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0) \times \big(\mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2\big)^{(k)}(0)}{\big(k!\big)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0) \times \big(\mu_1 \cdot Q_1^{(k)} + \mu_2 \cdot Q_2^{(k)}\big)(0)}{\big(k!\big)^2} && \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0) \times \big(\mu_1 \cdot Q_1^{(k)}(0) + \mu_2 \cdot Q_2^{(k)}(0)\big)}{\big(k!\big)^2} && \textit{(par linéarité de l'évaluation en un point)} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{\mu_1 \cdot P^{(k)}(0)\ Q_1^{(k)}(0) + \mu_2 \cdot P^{(k)}(0)\ Q_2^{(k)}(0)}{\big(k!\big)^2} && \textit{(par distributivité de la loi } \times \textit{ sur la loi } +\textit{)} \\ &= \mu_1 \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0)\ Q_1^{(k)}(0)}{\big(k!\big)^2} \ + \ \mu_2 \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0)\ Q_2^{(k)}(0)}{\big(k!\big)^2} && \textit{(par linéarité de la somme)} \\ &= \mu_1 \ \langle P, Q_1 \rangle \ + \ \mu_2 \ \langle P, Q_2 \rangle \end{aligned}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant :
× symétrique,
× linéaire à droite,
elle est linéaire à gauche. On en déduit qu'elle est bilinéaire.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive

  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

  × Tout d'abord :

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(0) \times P^{(k)}(0)}{\big(k!\big)^2} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\big(P^{(k)}(0)\big)^2}{\big(k!\big)^2}$$

  Pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$, $\big(P^{(k)}(0)\big)^2 \geqslant 0$ et $\dfrac{\big(P^{(k)}(0)\big)^2}{\big(k!\big)^2} \geqslant 0$.

  Par somme de quantités positives :

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{2} \frac{\big(P^{(k)}(0)\big)^2}{\big(k!\big)^2} \geqslant 0$$

  × Supposons maintenant : $\langle P, P \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{\big(P^{(k)}(0)\big)^2}{\big(k!\big)^2} = 0$. Démontrons : $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

  Une somme de quantités positives n'est nulle que si toutes les quantités sont nulles. Ainsi :

$$\begin{array}{ll} & \forall k \in [\![0, 2]\!],\ \big(P^{(k)}(0)\big)^2 = 0 \\ \text{donc} & \forall k \in [\![0, 2]\!],\ P^{(k)}(0) = 0 \\ \text{donc} & 0 \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité au moins } 3 \end{array}$$

  On en déduit que X^3 divise P. Ainsi, il existe $S \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$P(X) = X^3 \times S(X)$$

  Dans ce cas : $\deg\big(P(X)\big) = \deg\big(X^3\big) + \deg\big(S(X)\big) = 3 + \deg\big(S(X)\big)$.
  Or, comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\deg(P) \leqslant 2$.
  On en déduit : $\deg\big(S(X)\big) = -\infty$ et donc : $P(X) = X^3 \times 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

> L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie et est de plus bilinéaire, symétrique et définie-positive. C'est donc bien un produit scalaire.

□

2. Parenthèse

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien RÉEL.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est de dimension finie notée $m \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormée de F.

Quelle formule (portant sur les vecteurs de E) permet d'affirmer : $E = F \oplus F^{\perp}$?

Démonstration.

$$\boxed{\forall x \in E,\ x = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i\right)}$$

où $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \in F$ est la projection orthogonale de x sur le sous-espace vectoriel F, et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

Même si ce n'était pas demandé dans le sujet, on place ci-dessous la démonstration de cette formule.

1. Il s'agit de démontrer la propriété : $\forall x \in E,\ \exists!(u,v) \in F \times F^{\perp},\ x = u + v$.
Soit $x \in E$.

- Analyse :
On suppose qu'il existe $(u,v) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = u + v$.
Comme $u \in F$ et $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de F, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i$$

Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$:

$$\begin{array}{rcll} \langle x, e_j \rangle & = & \langle \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e_i + v, e_j \rangle & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \, \langle e_i, e_j \rangle + \cancel{\langle v, e_j \rangle} & \textit{(car } v \in F^{\perp}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \, \delta_{i,j} & \textit{(car } (e_1, \dots, e_m) \textit{ est orthonormale)} \\ & = & \lambda_j & \end{array}$$

Finalement : $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$ et $v = x - u$.

- Synthèse :
Notons $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i$ et $v = x - u$. Alors :
  × $x = u + v$
  × Comme $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de F, alors $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \in F$.
  × Il reste alors à vérifier : $v \in F^{\perp}$. Autrement dit, il s'agit de démontrer :

$$\forall j \in [\![1, m]\!], \langle v, e_j \rangle = 0$$

Soit $j \in [\![1, m]\!]$:

$$\begin{array}{rcll} \langle v, e_j \rangle & = & \langle x - \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i, e_j \rangle & \\ & = & \langle x, e_j \rangle - \sum\limits_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle & \textit{(par linéarité à gauche du produit scalaire)} \\ & = & \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle \, \langle e_j, e_j \rangle & \textit{(car } (e_1, \dots, e_m) \textit{ est une base orthonormale)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

□

2. Si $R \in \mathbb{R}_2[X]$ est un polynôme de E, que vaut : $\inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum\limits_{k=0}^{2} \dfrac{\left((R(X) - AX - b)^{(k)}(0) \right)^2}{(k!)^2}$?

(on n'attend pas de justification, seulement une définition / formule)

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sum\limits_{k=0}^{2} \dfrac{\left((R(X) - AX - b)^{(k)}(0) \right)^2}{(k!)^2} & = & \inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|R(X) - aX - b\|^2 \\ & = & \inf\limits_{Q \in \mathbb{R}_1[X]} \|R - Q\|^2 \\ & = & \left(\inf\limits_{Q \in \mathbb{R}_1[X]} \|R - Q\| \right)^2 \\ & = & \left(\mathrm{d}(R, \mathbb{R}_1[X]) \right)^2 \end{array}$$

□

3. On note $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $R(X) = X^2 - 2X$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F.
Quelle propriété possède le polynôme $R - p_F(R)$? *(on n'attend pas de justification)*

Démonstration.

$$\boxed{R - p_F(R) \in F^\perp}$$

□

4. Déterminer $p_F(R)$.

Démonstration.

- Par définition, $p_F(R) \in \mathbb{R}_1[X]$.
  Il existe donc $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, $p_F(R) = a_0 + a_1 X$.

$$\begin{array}{rcl}
p_F(R) \in F & \Leftrightarrow & R - p_F(R) \in F^\perp \\[2ex]
& \Leftrightarrow & \begin{array}{rl} & \langle R - p_F(R), 1\rangle = 0 \\ \text{et} & \langle R - p_F(R), X\rangle = 0 \end{array} \quad \textit{(car } (1, X) \textit{ est une famille génératrice de } F\textit{)} \\[2ex]
& \Leftrightarrow & \begin{array}{rl} & \langle X^2 - 2X - \big(a_0 + a_1 X\big), 1\rangle = 0 \\ \text{et} & \langle X^2 - 2X - \big(a_0 + a_1 X\big), X\rangle = 0 \end{array} \\[2ex]
& \Leftrightarrow & \begin{array}{rl} & \langle X^2 - (2 + a_1)X - a_0, 1\rangle = 0 \\ \text{et} & \langle X^2 - (2 + a_1)X - a_0, X\rangle = 0 \end{array} \\[2ex]
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} -a_0 & & & = & 0 \\ -a_0 & - & a_1 & = & 2 \end{array}\right. \\[2ex]
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} a_0 & & & = & 0 \\ & - & a_1 & = & 2 \end{array}\right. \\[2ex]
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcr} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & -2 \end{array}\right.
\end{array}$$

$$\boxed{\big(p_F(R)\big)(X) = a_0 + a_1\,X = -2\,X}$$

□

5. En déduire $\mathrm{d}(R, F)$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{d}(R, F) & = & \inf\limits_{Q \in \mathbb{R}_1[X]} \|R - Q\| \\[1ex]
& = & \|R - p_F(R)\| \\[1ex]
& = & \|(X^2 - 2X) - (-2X)\| \\[1ex]
& = & \|X^2\| \\[1ex]
& = & \sqrt{\langle X^2, X^2\rangle} \\[1ex]
& = & \sqrt{\dfrac{0 \times 0}{(0!)^2} + \dfrac{0 \times 0}{(1!)^2} + \dfrac{2 \times 2}{(2!)^2}} \\[1ex]
& = & \sqrt{1} \ = \ 1
\end{array}$$

□

Commentaire

- De manière générale, on pourrait considérer $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'application :

$$\begin{array}{ccccccc} \langle \cdot, \cdot \rangle & : & \mathbb{R}_n[X] & \times & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & & (P & , & Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a) \times Q^{(k)}(a)}{(k!)^2} \end{array}$$

  où $a \in \mathbb{R}$.
  Il est simple de démontrer que cette application est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$. De plus, la famille :

$$\left(1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right)$$

  est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

- Dans l'exercice proposé, on a choisit $a = 0$ et $n = 2$.
  La famille $(1, X, X^2)$ est alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
  Notons encore $F = \mathbb{R}_1[X]$.
  Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $Q = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. Alors :

$$\begin{aligned} p_F(Q) &= \sum_{j=0}^{1} \left\langle Q, X^j \right\rangle \cdot X^j \\ &= \sum_{j=0}^{1} \left\langle \sum_{i=0}^{2} a_i \cdot X^i, X^j \right\rangle \cdot X^j \\ &= \sum_{j=0}^{1} \left(\sum_{i=0}^{2} a_i \left\langle X^i, X^j \right\rangle \right) \cdot X^j \\ &= \sum_{j=0}^{2} \left(\sum_{\substack{i \in [\![0,2]\!] \\ i=j}} a_i \left\langle X^i, X^j \right\rangle + \cancel{\sum_{\substack{i \in [\![0,2]\!] \\ i \neq j}} a_i \left\langle X^i, X^j \right\rangle} \right) \cdot X^j \\ &= \sum_{j=0}^{2} a_j \left\langle X^j, X^j \right\rangle \cdot X^j \\ &= \sum_{j=0}^{1} a_j \cdot X^j \end{aligned}$$