Interrogation de cours 13

1. Compléter les 4 éléments manquants.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.

1. Énoncé du critère spécial des séries alternées

- $\forall x_0 \in I$, $\sum f_n(x_0)$ est une série alternée
  (s'écrit sous la forme $\sum (-1)^n \, a_n(x_0)$ où $\big(a_n(x_0)\big)$ est une suite de signe constant)
-
-

$\Rightarrow$ La série $\sum f_n$ converge simplement sur I

2. De plus, si la série de fonction $\sum f_n$ est une série vérifiant les critères ci-dessus, alors :

a) $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de .

($R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série numérique $\sum f_n(x)$)

b) $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ |\,R_n(x)\,| = |\,S(x) - S_n(x)\,| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant$.

2. Définition de la convergence simple sur I vers f d'une suite de fonctions (f_n).

3. Définition de la convergence simple sur I d'une série de fonctions $\sum f_n$.

4. Définition de la convergence uniforme sur I d'une série de fonctions $\sum f_n$.

5. Rayer les mentions inutiles (1 en cas de bonne réponse, -1 en cas de mauvaise réponse, 0 en cas d'absence de réponse).
Aucune justification n'est attendue.

a)	Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$ vers f alors (f_n) converge uniformément sur $]0, +\infty[$ vers f.	:	vrai / faux
b)	Une suite numérique (u_n) converge simplement sur un intervalle I si elle admet une limite finie dans l'intervalle I.	:	vrai / faux
c)	Une série de fonctions est, par définition, une suite de fonctions.	:	vrai / faux
d)	Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$ vers f alors (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers f.	:	vrai / faux
e)	Si pour tout $x \in I$, $\lvert f_n(x) - f(x)\rvert \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.	:	vrai / faux

6. Notons $E = \mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$.

a) Justifier (sans calcul) que la matrice A est diagonalisable.

b) Déterminer χ_f, polynôme caractéristique de l'endomorphisme f.

c) En déduire les valeurs de $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.

d) En déduire $\mathrm{Sp}(f)$.

e) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

f) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.