Interrogation de cours 13

1. On définit la suite (a_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^{(-1)^n}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\ 2^{(-1)^n} x^n$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^{(-1)^n} \ = \begin{cases} 2 & \textit{si } n \textit{ pair} \\ \dfrac{1}{2} & \textit{si } n \textit{ impair} \end{cases}$$

- On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^{(-1)^n} \ \geqslant \ \frac{1}{2}$$

alors $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ 2^{(-1)^n}\ x^n\right)\ \leqslant\ \mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ \dfrac{1}{2}\ x^n\right) = 1.$

- Et aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^{(-1)^n} \ \leqslant \ 2$$

alors $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ 2^{(-1)^n}\ x^n\right)\ \leqslant\ \mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ 2x^n\right) = 1.$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ 2^{(-1)^n}\ x^n\right) = 1.}$$

□

b) Déterminer une expression simple de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n} x^n$ sur $]-1, 1[$ *(il est conseillé de découper la somme suivant la parité de l'indice de sommation)*

Démonstration.
Soit $x \in\ ]-1, 1[$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n} x^n &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} 2^{(-1)^n} x^n \ + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} 2^{(-1)^n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^{2n}} x^{2n} \ + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^{2n+1}} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2\ x^{2n} \ + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\ x^{2n+1} \\
&= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n \ + \ \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n \\
&= \left(2 + \frac{x}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^2\right)^n \\
&= \left(2 + \frac{x}{2}\right) \frac{1}{1 - x^2}
\end{aligned}$$

(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison $x^2 \in\ ]-1, 1[$)

$$\boxed{\forall x \in\ ]-1, 1[,\ f(x) = \left(2 + \frac{x}{2}\right) \frac{1}{1 - x^2}}$$

□

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{1}{4n^2-1} x^{2n}$.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x_0) = \dfrac{1}{4n^2-1}\ {x_0}^{2n}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| &= \frac{\left| \frac{1}{4(n+1)^2-1}\ {x_0}^{2\,(n+1)} \right|}{\left| \frac{1}{4n^2-1}\ {x_0}^{2n} \right|} \\
&= \frac{|\,4n^2-1\,|}{|\,4(n+1)^2-1\,|} \times \frac{|\,x_0\,|^{2n+2}}{|\,x_0\,|^{2n}} \\
&= \frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1}\ |x_0|^2 && \textit{(en prenant } n \geqslant 1, \textit{ on assure } 4n^2-1 \geqslant 0\textit{)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{4n^2}}{\cancel{4n^2}}\ |x_0|^2
\end{aligned}$$

  Finalement : $\dfrac{|\,u_{n+1}(x_0)\,|}{|\,u_n(x_0)\,|} \underset{n\to+\infty}{\sim} |\,x_0\,|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\,x_0\,|^2$.

- Par ailleurs :

$$|\,x_0\,|^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\,x_0\,| < 1 \qquad \textit{(car la fonction racine est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)}$$

  - D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|\,x_0\,| < 1$ la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est absolument convergente.
    On en déduit : $R \geqslant 1$.
  - D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, **pour tout** $|\,x_0\,| > 1$ la série numérique $\sum\ u_n(x_0)$ est grossièrement divergente.
    On en déduit : $R \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } R = 1.}$$

□

3. *a)* **Par technique de majoration**, minorer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n x^n$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{n} &\leqslant\ & 1 \\
\text{donc}\quad & \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &\leqslant\ & 1^n && \textit{(par croissance de la fonction élévation à la puissance } n \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)}
\end{aligned}$$

On en conclut :

$$\mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\ x^n\right)\ \geqslant\ \mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ 1\,x^n\right) = 1$$

□

b) Démontrer que la suite $\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \quad = \quad \exp\left(n \ \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\ \right)$$

- Or :

$$n \ \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ \frac{-1}{n} = -1$$

On en déduit :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \ = \ \exp\left(n \ \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\ \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-1\right)$$

□

c) En conclure la valeur de R.

Démonstration.

- La série numérique $\sum \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \ \mathbf{1}^n$ est grossièrement divergente puisque :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} \neq 0$$

- On en déduit : $\mathrm{R_{cv}}\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \ x^n\right) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{R_{cv}}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \ x^n\right) = 1.}$$

□