
Interrogation de cours 14

Dans l'écriture des développements en série entière usuels au voisinage de 0, il est demandé de préciser le rayon de convergence (soit en écrivant « $R = \dots$ », soit en écrivant « $\forall x \in]\dots, \dots[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dots$ »).

1. a) Donner le développement en série entière, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

b) Comment obtient-on le rayon R de convergence de la série entière associée ?

c) Étudier la convergence aux bords de l'intervalle, c'est-à-dire en $-R$ et en R (où R est le rayon de convergence déterminé en question précédente).

2. Donner le développement en série entière, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$.

3. Donner le développement en série entière, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 + 2x}$.

4. Donner le développement en série entière, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.

5. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - 2, 2[$.
Qu'appelle-t-on série de Taylor de f en 0 ?

6. On considère une variable X telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

a) Déterminer G_X . On détaillera avec précision l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Rappeler les formules permettant d'obtenir $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X - 1))$ et $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de G_X .
On donnera (sans démonstration) les valeurs de ces quantités.