Interrogation de cours 14

Pour tout $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on pose $\dbinom{\alpha}{n} = 1$ si $n = 0$, et $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n \geqslant 1$.

On considère un nombre réel α, qui n'est pas un entier naturel, et on note f_α la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$\forall x > -1, \ f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

1. Vérifier que la fonction f_α est solution sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(1+x)\, y' - \alpha\, y = 0 \tag{1}$$

Démonstration.

- La fonction f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ car elle est la composée $f_\alpha = g_2 \circ g_1$ où :
  - × $g_1 : x \mapsto \alpha \ \ln(1+x)$ est :
    - ▸ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.
    - ▸ telle que : $g_1\big(\,]-1, +\infty[\,\big) \ \subset \ \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Commentaire

- Le caractère $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ de la fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$ est lui-même obtenu comme composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Plus précisément, la fonction fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ car elle est la composée $h = h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto 1 + x$ est :
    - ▸ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ car polynomiale.
    - ▸ telle que : $h_1\big(\,]-1, +\infty[\,\big) \ \subset]0, +\infty[$.
  - × $h_2 : x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- Dans cette question, affirmer le caractère $\mathscr{C}^1$ (ou tout simplement dérivable) suffisait à obtenir les points. Cependant, il est important de savoir démontrer correctement le caractère $\mathscr{C}^1$ car :
  - × il est parfois au cœur de la question posée.
  - × la méthodologie permet de mieux comprendre la notion et d'éviter certaines erreurs. Typiquement, affirmer que la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ est une grossière erreur : évidemment, la fonction ln, qui n'est même pas définie sur $]-1, +\infty[$, n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle.

  Si on souhaite signaler que la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions sans entrer dans tous les détails de rédaction, on pourra signaler qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur des intervalles adéquats.

- De plus, pour tout $x > -1$: $f'_\alpha(x) = \alpha \ (1+x)^{\alpha-1}$. Ainsi, pour tout $x > -1$:

$$\begin{array}{rcl} (1+x) \ f'_\alpha(x) - \alpha \ f_\alpha(x) & = & (1+x) \ \Big(\alpha \ (1+x)^{\alpha-1}\Big) - \alpha \ f_\alpha(x) \\ & = & \alpha \ (1+x)^\alpha - \alpha \ (1+x)^\alpha \\ & = & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f_\alpha \text{ est solution de l'équation différentielle (1) sur l'intervalle }]-1, +\infty[.}$$

□

2. On se propose de chercher les solutions de l'équation différentielle (1) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Pour cela, on considère une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme, notée $\psi : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, est solution de (1) sur l'intervalle $]-r, r[$, avec $r = \min(R, 1)$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, a_{n+1} = (\alpha - n)\, a_n$.

Démonstration.

- Comme ψ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $]-R, R[$ et donc en particulier sur $]-r, r[$. De plus, pour tout $x \in\ ]-r, r[$:

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

- Soit $x \in\ ]-r, r[$.

$$\begin{aligned}
& (1+x)\ \psi'(x) - \alpha\, \psi(x) \\
= \ & (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \ - \ \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
= \ & \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n \ - \ \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\alpha\, a_n\big)\, x^n \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n \ - \ \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\alpha\, a_n\big)\, x^n \\
= \ & \left(a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n\right) \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^n \ - \ \left(\alpha\, a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\alpha\, a_n\big)\, x^n\right) \\
= \ & a_1 - \alpha\, a_0 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((n+1)\, a_{n+1} + (n-\alpha)\, a_n\Big) x^n
\end{aligned}$$

- Comme ψ est solution de (1) :

$$\forall x \in\ ]-r, r[,\ (1+x)\ \psi'(x) - \alpha\, \psi(x) \ = \ 0$$

  On en déduit, par unicité du développement en série entière :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 - \alpha\, a_0 \ = \ 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ (n+1)\, a_{n+1} + (n-\alpha)\, a_n \ = \ 0 \end{array} \right.$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, a_{n+1} + (n-\alpha)\, a_n \ = \ 0$.

$$\boxed{\text{Ou encore : } \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, a_{n+1} = (\alpha - n)\, a_n.}$$

□

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dbinom{\alpha}{n} a_0$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $a_n = \dbinom{\alpha}{n} a_0$.

- **Initialisation**
  - D'une part : $a_1 = \alpha\, a_0$ d'après la question précédente.
  - D'autre part : $\dbinom{\alpha}{1} a_0 = \dfrac{\alpha}{0!} = \alpha$ par définition.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $a_{n+1} = \dbinom{\alpha}{n+1} a_0$).
  D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{(\alpha - n)}{n+1}\, a_n \\
&= \frac{(\alpha - n)}{n+1} \binom{\alpha}{n} a_0 \\
&= \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-(n-1))}{n!} \times \frac{(\alpha - n)}{n+1}\, a_0 \\
&= \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-(n-1))\,(\alpha-n)}{(n+1)!}\, a_0 \\
&= \binom{\alpha}{n+1} a_0
\end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n).}$$

□

c) Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0 = 1$, puis vérifier que sa somme est bien solution de (1) sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{|\, a_{n+1} \,|}{|\, a_n \,|} \\
&= \frac{\left|\, \binom{\alpha}{n+1} \,\right|}{\left|\, \binom{\alpha}{n} \,\right|} \\
&= \left| \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-(n-1))\,(\alpha-n)}{(n+1)!} \right| \times \left| \frac{n!}{\alpha\,(\alpha-1)\,\cdots\,(\alpha-(n-1))} \right| \\
&= \frac{\cancel{|\alpha|\,|\alpha-1|\,\cdots\,|\alpha-(n-1)|}\,|\alpha-n|}{\cancel{|\alpha|\,|\alpha-1|\,\cdots\,|\alpha-(n-1)|}} \times \left| \frac{\cancel{n}!}{(n+1)\times\cancel{n}!} \right| \\
&= \frac{n-\alpha}{n+1} \qquad \textit{(dès que } n \geqslant \alpha\textit{)}
\end{aligned}$$

- Ainsi : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut par théorème de d'Alembert : } \mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ a_n\, x^n\right) = \frac{1}{1} = 1.}$$

□

3. Montrer soigneusement que pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{\alpha}{n} x^n$.

Démonstration.

- Les fonctions $x \mapsto -\dfrac{\alpha}{1+x}$ et $x \mapsto 0$ sont continues sur $]-1,1[$.
  D'après le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1, le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in\,]-1,1[,\ h'(x) - \dfrac{\alpha}{1+x}\ h(x)\ =\ 0 \\[2ex] h(0) = 1 \end{array}\right.$$

  admet une unique solution sur l'intervalle $]-1,1[$.
- Or :
  × d'après la question ***1.***, la fonction f_α est solution de ce problème de Cauchy sur $]-1,1[$.
  × d'après la question précédente, la fonction ψ est solution de ce problème de Cauchy sur $]-1,1[$.
  On en conclut que ces deux fonctions coïncident sur $]-1,1[$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \forall x \in \left]-1,1\right[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.}$$

□