
Interrogation de cours 15

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n}{3^{2n+1}} x^n$.

2. Déterminer la somme, sur l'intervalle ouvert de convergence, de la série entière précédente.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{n} x^{2n}$.

4. Déterminer la somme, sur l'intervalle ouvert de convergence, de la série entière précédente.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \frac{n^2}{n^2 \sqrt{x} + 1}$.

a) Démontrer que (f_n) converge simplement sur $]0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.

b) Déterminer la limite de la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
(on utilisera le théorème de convergence dominée)

c) Expliquer pourquoi il n'était pas possible d'utiliser le théorème d'interversion par hypothèse de convergence uniforme (démonstration rigoureuse attendue).

6. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme.