Interrogation de cours 15

1. On définit la suite (a_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \begin{cases} 3^n & \textit{si } n \textit{ est impair} \\ \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right) & \textit{si } n \textit{ est pair} \end{cases}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, x^n$.

Démonstration.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

- Dans toute la suite, on définit les suites $\big(u_n(x_0)\big)$ et $\big(v_n(x_0)\big)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(x_0) = a_{2n+1}\, {x_0}^{2n+1} \quad \text{et} \quad v_n(x_0) = a_{2n}\, {x_0}^{2n}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| &= \frac{|\, u_{n+1}(x_0)\,|}{|\, u_n(x_0)\,|} \\
&= \frac{|\, a_{2(n+1)+1}\ {x_0}^{2(n+1)+1}\,|}{|\, a_{2n+1}\ {x_0}^{2n+1}\,|} \\
&= \frac{|\, a_{2n+3}\,| \times |\, x_0\,|^{2n+3}}{|\, a_{2n+1}\,| \times |\, x_0\,|^{2n+1}} \\
&= \frac{|\, a_{2n+3}\,|}{|\, a_{2n+1}\,|}\ |\, x_0\,|^2 \\
&= \frac{|\, 3^{2n+3}\,|}{|\, 3^{2n+1}\,|}\ |\, x_0\,|^2 \qquad \textit{(car } 2n+1 \textit{ et } 2n+3 \textit{ sont des entiers impairs)} \\
&= \frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}}\ |\, x_0\,|^2 \\
&= 3^2\ |\, x_0\,|^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3^2\ |\, x_0\,|^2
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent.

× Si $3^2\ |\,x_0\,|^2 < 1$, c'est-à-dire $|\,x_0\,|^2 < \dfrac{1}{3^2}$ ou encore $|\,x_0\,| < \dfrac{1}{3}$
alors, par règle de d'Alembert, la série numérique $\sum a_{2n+1}\, {x_0}^{2n+1}$ est absolument convergente.
On en déduit : $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum a_{2n+1}\, x^{2n+1}\right) \geqslant \dfrac{1}{3}$.

× Si $3^2\ |\,x_0\,|^2 > 1$, c'est-à-dire $|\,x_0\,| > \dfrac{1}{3}$
alors, par règle de d'Alembert, la série numérique $\sum a_{2n+1}\, {x_0}^{2n+1}$ est grossièrement divergente.
On en déduit : $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum a_{2n+1}\, x^{2n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{R_{cv}}\left(\sum a_{2n+1}\, x^{2n+1}\right) = \frac{1}{3}.}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{v_{n+1}(x_0)}{v_n(x_0)} \right| &= \frac{|\, v_{n+1}(x_0)\,|}{|\, v_n(x_0)\,|} \\
&= \frac{|\, a_{2(n+1)} \ {x_0}^{2(n+1)}\,|}{|\, a_{2n} \ {x_0}^{2n}\,|} \\
&= \frac{|\, a_{2n+2}\,| \times |\, x_0\,|^{2n+2}}{|\, a_{2n}\,| \times |\, x_0\,|^{2n}} \\
&= \frac{|\, a_{2n+2}\,|}{|\, a_{2n}\,|} \ |\, x_0\,|^2 \\
&= \frac{|\, \frac{2n+2}{2} \left(\frac{2n+2}{2} - 1 \right) |}{|\, \frac{2n}{2} \left(\frac{2n}{2} - 1 \right) |} \ |\, x_0\,|^2 \qquad \textit{(car } 2n \textit{ et } 2n+2 \textit{ sont des entiers pairs)} \\
&= \frac{(n+1)\, n}{n\,(n-1)} \ |\, x_0\,|^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} \ |\, x_0\,|^2 \\
&= |\, x_0\,|^2 \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\, x_0\,|^2
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent.

× Si $|\, x_0\,|^2 < 1$, c'est-à-dire $|\, x_0\,| < 1$
alors, par règle de d'Alembert, la série numérique $\sum \ a_{2n}\, {x_0}^{2n}$ est absolument convergente.
On en déduit : $\mathrm{R}_{\mathrm{cv}} \left(\sum \ a_{2n}\, x^{2n} \right) \ \geqslant \ 1$.

× Si $|\, x_0\,|^2 > 1$, c'est-à-dire $|\, x_0\,| > 1$
alors, par règle de d'Alembert, la série numérique $\sum \ a_{2n}\, {x_0}^{2n}$ est absolument convergente.
On en déduit : $\mathrm{R}_{\mathrm{cv}} \left(\sum \ a_{2n}\, x^{2n} \right) \ \leqslant \ 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{R}_{\mathrm{cv}} \left(\sum \ a_{2n}\, x^{2n} \right) \ = \ 1.}$$

- Comme $\frac{1}{3} \neq 1$, alors, par argument de somme :

$$\mathrm{R}_{\mathrm{cv}} \left(\sum \ a_n\, x^n \right) \ = \ \min \ \left(\tfrac{1}{3}, 1 \right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{R}_{\mathrm{cv}} \left(\sum \ a_n\, x^n \right) \ = \ \frac{1}{3}.}$$

Commentaire

- L'une des difficultés concernant le chapitre sur les séries entières est la bonne compréhension de l'objet série entière. On note de la même manière une série entière $\sum \ a_n\, x^n$ (c'est une série de fonctions) et la série numérique $\sum \ a_n\, x^n$. Afin de différencier ces deux objets, on introduit dans l'énoncé une variable notée x_0 (et pas x). Il est conseillé de faire de même et de spécifier, avant l'écriture du symbole $\sum$, si l'on a affaire à une série numérique (qui peut être (grossièrement) divergente ou (absolument) convergente) ou a une série entière (dont les modes de convergence sont

Commentaire

- Il convient de `NE PAS` écrire $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum a_n\, {x_0}^n\right)$. En effet, déterminer le rayon de convergence d'une série numérique n'a aucun sens. ☐

b) Déterminer une expression simple de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ sur $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ *(il est conseillé de découper la somme suivant la parité de l'indice de sommation)*

Démonstration.
Soit $x \in\,]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ \boxed{n \text{ pair}}}} a_n\, x^n \ + \sum_{\substack{n=0 \\ \boxed{n \text{ impair}}}} a_n\, x^n \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} a_{2i}\, x^{2i} \ + \ \sum_{j=0}^{+\infty} a_{2j+1}\, x^{2j+1} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \tfrac{2i}{2} \left(\tfrac{2i}{2} - 1\right) x^{2i} \ + \ \sum_{j=0}^{+\infty} 3^{2j+1}\, x^{2j+1} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} i\,(i-1)\left(x^2\right)^i \ + \ 3\,x \sum_{j=0}^{+\infty} \left(3^2\right)^j \left(x^2\right)^j \\
&= \sum_{i=2}^{+\infty} i\,(i-1)\left(x^2\right)^i \ + \ 3\,x \sum_{j=0}^{+\infty} \left(3\,x^2\right)^j && \textit{(car les 2 premiers éléments de la somme de gauche sont nuls)} \\
&= \frac{2}{\left(1 - x^2\right)^3} \ + \ 3\,x\, \frac{1}{1 - \left(3\,x^2\right)} && \textit{(par formule de la somme géométrique et de la somme géométrique dérivée deuxième)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in\,]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[,\ f(x) \ = \ \frac{2}{\left(1 - x^2\right)^3} \ + \ 3\,x\, \frac{1}{1 - \left(3\,x^2\right)}}$$

☐

2. On souhaite déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \ \ln(n)\ x^n$.

a) Rappeler la définition de rayon de convergence pour une série entière de la variable réelle.

Démonstration.

- On note E_a l'ensemble défini par :

$$\begin{aligned}
E_a &= \left\{\, r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } \left(a_n\, r^n\right) \text{ est bornée} \,\right\} \\
&= \left\{\, |\,z\,| \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite numérique } \left(a_n\, z^n\right) \text{ est bornée} \,\right\}
\end{aligned}$$

- On appelle rayon de convergence R de la série entière $\sum \ a_n\, z^n$ l'élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ défini par :
  - × $R \ = \ \sup\ \left(E_a\right)$ si l'ensemble E_a est majoré,
  - × $R \ = \ +\infty$ si l'ensemble E_a n'est pas majoré. ☐

b) En raisonnant sur la suite $\big(\ln(n)\big)$, majorer R.

Démonstration.

- La suite $\big(\ \ln(n)\, 1^n\ \big)$ (autrement dit la suite $\big(\ \ln(n)\ \big)$) n'est pas bornée.
- On en déduit : $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ \ln(n)\, z^n\right)\ \leqslant\ 1$.

$$\boxed{R \leqslant 1}$$

□

c) Rappeler (sans démonstration), l'inégalité de convexité classique vérifiée par la fonction ln.

Démonstration.

$$\boxed{\forall x \in\,]0, +\infty[,\ \ln(x) \leqslant x - 1}$$

□

d) À l'aide de la question précédente (utilisée judicieusement), minorer R.

Démonstration.

- Remarquons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} \big|\ \ln(n)\ \big| & = & \ln(n) & \\ & \leqslant & n-1 & \textit{(d'après l'inégalité de la question précédente en } x = n > 0\textit{)} \\ & \leqslant & n & \end{array}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \big|\ \ln(n)\ \big| \leqslant n$.

- On en déduit : $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ \ln(n)\, x^n\right)\ \geqslant\ \mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ n\, x^n\right) = \mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ x^n\right) = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{R_{cv}}\left(\sum\ \ln(n)\, x^n\right) = 1.}$$

□