# Interrogation de cours 17

On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à $n$.

On dispose d'un jeton mobile sur un axe gradué de 0 à $n$ ; la position initiale du jeton est 0.

On effectue des tirages (considérés indépendants) avec remise dans l'urne et à chaque tirage, si le numéro de la boule est inférieur ou égal à la position du jeton, on déplace le jeton d'une graduation vers la gauche, et si le numéro de la boule est strictement supérieur à la position du jeton, on le déplace d'une graduation vers la droite. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note :

× $Y_j$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la boule obtenue lors du $j^{\text{ème}}$ tirage.

× $X_j$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la position du jeton après $j$ tirages.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, les variables $X_k$ et $Y_\ell$ sont indépendantes.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

***1.*** Reconnaître la loi de $Y_j$.

***2.*** Dans cette question et cette question uniquement, on considère le cas $n = 2$.
Lors des 7 premiers tirages, on obtient, dans cette ordre, les numéros de boules suivants :

$$1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 1$$

Décrire la trajectoire du mobile, étape après étape, sur l'axe gradué.

***3.*** On revient maintenant au cas général (on ne suppose plus $n = 2$).
Déterminer $X_j(\Omega)$ (a minima, on déterminera une sur-approximation de cet ensemble).

***4.*** Démontrer : $\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = 0\}\big) = \dfrac{1}{n}\, \mathbb{P}\big(\{X_j = 1\}\big)$.

Démontrer $\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = n\}\big) = \dfrac{1}{n}\, \mathbb{P}\big(\{X_j = n-1\}\big)$.

***5.*** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Démontrer : $\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\}\big) = \dfrac{n-k+1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_j = k-1\}\big) + \dfrac{k+1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_j = k+1\}\big)$.
On utilisera la formule des probabilités totales.

***6.*** Rappeler pourquoi la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ existe au moins sur l'intervalle $]-1, 1[$.

***7.*** On note $G_j$ la fonction génératrice de $X_j$, pourquoi $G_j$ est-elle polynomiale ?

***8.*** Exprimer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G_j$ (formule attendue sans démonstration).