Interrogation de cours 17

On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à n.

On dispose d'un jeton mobile sur un axe gradué de 0 à n ; la position initiale du jeton est 0.

On effectue des tirages (considérés indépendants) avec remise dans l'urne et à chaque tirage, si le numéro de la boule est inférieur ou égal à la position du jeton, on déplace le jeton d'une graduation vers la gauche, et si le numéro de la boule est strictement supérieur à la position du jeton, on le déplace d'une graduation vers la droite. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note :

× Y_j la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la boule obtenue lors du $j^{\text{ème}}$ tirage.

× X_j la variable aléatoire qui prend pour valeur la position du jeton après j tirages.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, les variables X_k et Y_ℓ sont indépendantes.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

1. Reconnaître la loi de Y_j.

Démonstration.

- L'expérience possède n issues équiprobables numérotées de 1 à n.
- La variable aléatoire Y_j prend pour valeur le numéro de l'issue obtenue.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_j \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket).}$$

Commentaire

- Cette question est classique aux concours. Lorsqu'il est demandé de « Reconnaître la loi », c'est que la variable aléatoire considérée suit une loi usuelle.
- Pour démontrer qu'une variable aléatoire suit une loi usuelle, il faut démontrer que l'expérience et la variable aléatoires considérées sont des cas particuliers du cas général correspondant. Par exemple, pour démontrer qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, il faut signaler que :

  1) l'expérience est une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès p.

  2) la variable aléatoire X prend pour valeur le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

  Ne pas parler d'épreuves de Bernoulli et préférer mettre en avant qu'on réalise des tirages dans des urnes / des lancers de pièce, démontre une incompréhension totale de la question posée.

□

2. Dans cette question et cette question uniquement, on considère le cas $n = 3$.
Lors des 7 premiers tirages, on obtient, dans cette ordre, les numéros de boules suivants :

$$1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 1$$

Décrire la trajectoire du mobile, étape après étape, sur l'axe gradué.

Démonstration.
Le mobile se trouve initialement en position 0.

- On tire alors la boule 1.
  Comme $1 > 0$, le mobile se déplace d'une graduation vers la droite et atteint la position 1.
- On tire alors la boule 2.
  Comme $2 > 1$, le mobile se déplace d'une graduation vers la droite et atteint la position 2.

- On tire alors la boule 2.
  Comme $2 \not> 2$, le mobile se déplace d'une graduation vers la gauche et atteint la position 1.
- On tire alors la boule 2.
  Comme $2 > 1$, le mobile se déplace d'une graduation vers la droite et atteint la position 2.
- On tire alors la boule 3.
  Comme $3 > 2$, le mobile se déplace d'une graduation vers la droite et atteint la position 3.
- On tire alors la boule 3.
  Comme $3 \not> 3$, le mobile se déplace d'une graduation vers la gauche et atteint la position 2.
- On tire alors la boule 3.
  Comme $1 \not> 2$, le mobile se déplace d'une graduation vers la gauche et atteint la position 1. □

3. On revient maintenant au cas général (on ne suppose plus $n = 3$).
Déterminer $X_j(\Omega)$ (a minima, on déterminera une sur-approximation de cet ensemble).

Démonstration.
Démontrons : $X_j(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
Pour bien comprendre ce point, il faut avoir en tête que si le mobile se retrouve en position 0 à une étape, alors le tirage qui suit amène forcément un nombre strictement plus grand que 0 (puisque l'on tire des boules numérotées de 1 à n) et le mobile va donc se déplacer vers la droite.
Par ailleurs, si le mobile se situe en n à une étape, alors le tirage qui suit amène forcément un nombre inférieur ou égal à n (puisque l'on tire des boules numérotées de 1 à n) et le mobile va donc se déplacer vers la gauche.
Ainsi, la plus petite position atteignable par le mobile est 0 et la plus grande est n.

$$\boxed{X_j(\Omega) \subset [\![0, n]\!]}$$

Commentaire

- On peut établir avec précision $X_j(\Omega)$. Tout d'abord, il faut remarquer que si $j < n$ alors le mobile ne peut atteindre, au maximum, que la position j (et n'atteindra donc pas n). Par ailleurs, on peut remarquer que les positions paires (respectivement impaires) ne peuvent être atteintes que par un nombre pair (respectivement impair) de déplacements. On peut alors démontrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:
  × si $j < n$ alors $X_j(\Omega)$ est l'ensemble des nombres de $[\![0, j]\!]$ qui sont de même parité que j.
  × si $j \geqslant n$ alors $X_j(\Omega)$ est l'ensemble des nombres de $[\![0, n]\!]$ qui sont de même parité que j.
- Cette discussion est inutilement longue. Dans un exercice de probabilités, ce qui importe le plus n'est pas tant l'ensemble image $X_j(\Omega)$ que l'ensemble des valeurs de X_j qui sont prises avec probabilité non nulle.

□

4. Démontrer : $\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = 0\}\big) = \dfrac{1}{n}\, \mathbb{P}\big(\{X_j = 1\}\big)$.

Démonstration.
- Il suffit de remarquer :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = 0\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{Y_j = 1\} \cap \{X_j = 1\}\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{Y_j = 1\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X_j = 1\}\big) & \textit{(car } Y_j \perp\!\!\!\perp X_j\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \times \mathbb{P}\big(\{X_j = 1\}\big) & \textit{(car } Y_j \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])\textit{)} \end{array}$$

- Il reste à démontrer : $\{X_{j+1} = 0\} = \{Y_j = 1\} \cap \{X_j = 1\}$.

  L'événement $\{X_{j+1} = 0\}$ est réalisé

  $\Leftrightarrow$ La variable aléatoire X_{j+1} prend la valeur 0

  $\Leftrightarrow$ Après $j+1$ tirages, le jeton se situe en position 0

  $\Leftrightarrow$ Après j tirages, le jeton se situait en position 1
  `ET` le jeton s'est déplacé vers la gauche après le $j+1^{\text{ème}}$ tirage

  $\Leftrightarrow$ La variable aléatoire X_j prend pour valeur 1
  `ET` lors du $j^{\text{ème}}$ tirage on a tiré une boule dont le numéro est inférieur à 1

  $\Leftrightarrow$ L'événement $\{X_j = 1\}$ est réalisé
  `ET` lors du $j^{\text{ème}}$ tirage on a tiré la boule numérotée 1

  $\Leftrightarrow$ L'événement $\{X_j = 1\}$ est réalisé
  `ET` l'événement $\{Y_j = 1\}$ est réalisé

  $\Leftrightarrow$ L'événement $\{X_j = 1\} \cap \{Y_j = 1\}$ est réalisé

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = 0\}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_j = 1\}\big)}$$

□

Démontrer $\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = n\}\big) = \dfrac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_j = n-1\}\big)$.

Démonstration.
On procède de la même manière.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = n\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{Y_j = n\} \cap \{X_j = n-1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{Y_j = n\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X_j = n-1\}\big) && \textit{(car } Y_j \perp\!\!\!\perp X_j\textit{)} \\
&= \frac{1}{n} \times \mathbb{P}\big(\{X_j = n-1\}\big) && \textit{(car } Y_j \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = n\}\big) = \frac{1}{n} \times \mathbb{P}\big(\{X_j = n-1\}\big)}$$

Commentaire

- Dans ces deux questions, on demande de démontrer qu'une probabilité s'écrit comme un produit. Dans ce cas, il est naturel de penser à écrire l'événement considéré sous forme d'une intersection.
- Il était aussi possible de rédiger cette question à l'aide d'une formule des probabilités totales. Plus précisément, comme la famille $\big(\{X_j = i\}\big)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements, alors, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = 0\}\big) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = 0\} \cap \{X_j = i\}\big) \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ \boxed{i=1}}}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\} \cap \{X_j = i\}\big) + \cancel{\sum_{\substack{i=0 \\ \boxed{i \neq 1}}}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\} \cap \{X_j = i\}\big)}
\end{aligned}$$

□

5. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Démontrer : $\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\}\big) = \dfrac{n-k+1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_j = k-1\}\big) + \dfrac{k+1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_j = k+1\}\big)$.
On utilisera la formule des probabilités totales.

Démonstration.

- La famille $\big(\{X_j = i\}\big)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\}\big) \\
= \ & \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\} \cap \{X_j = i\}\big) \\
= \ & \sum_{\substack{i=0 \\ \boxed{i \in \{k-1, k+1\}}}}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\} \cap \{X_j = i\}\big) + \cancel{\sum_{\substack{i=0 \\ \boxed{i \notin \{k-1, k+1\}}}}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\} \cap \{X_j = i\}\big)} \\
= \ & \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\} \cap \{X_j = k-1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\} \cap \{X_j = k+1\}\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\{k \leqslant Y_j \leqslant n\} \cap \{X_j = k-1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{1 \leqslant Y_j \leqslant k+1\} \cap \{X_j = k+1\}\big)
\end{aligned}$$

  La dernière égalité est obtenue en remarquant notamment :

  L'événement $\{X_{j+1} = k\} \cap \{X_j = k-1\}$ est réalisé

  $\Leftrightarrow$ La variable aléatoire X_{j+1} prend la valeur k
  ET la variable aléatoire X_j prend la valeur $k-1$

  $\Leftrightarrow$ Après $j+1$ tirages, le jeton se situe en position k
  ET après j tirages, le jeton se situait en position $k-1$

  $\Leftrightarrow$ Après j tirages, le jeton se situait en position $k-1$
  ET le jeton a effectué un déplacement vers la droite à l'issue du $(j+1)^{\text{ème}}$ tirage

  $\Leftrightarrow$ Après j tirages, le jeton se situait en position $k-1$
  ET le $(j+1)^{\text{ème}}$ tirage a amené une boule dont le numéro est strictement plus grand que $k-1$

  $\Leftrightarrow$ La variable X_j prend la valeur $k-1$
  ET la variable aléatoire Y_{j+1} prend une valeur dans l'ensemble $[\![0, n]\!]$

  $\Leftrightarrow$ L'événement $\{X_j = k-1\}$ est réalisé
  ET l'événement $\{k \leqslant Y_j \leqslant n\}$ est réalisé

  $\Leftrightarrow$ L'événement $\{k \leqslant Y_j \leqslant n\} \cap \{X_j = k-1\}$ est réalisé

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{k \leqslant Y_j \leqslant n\}\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k}^{n} \{Y_j = i\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k}^{n} \{Y_j = i\}\right) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \mathbb{P}\big(\{Y_j = i\}\big) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n} && \textit{(car } Y_j \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)\textit{)} \\
&= (n-k+1) \times \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\}\big) \\
= \ &\mathbb{P}\big(\{k \leqslant Y_j \leqslant n\} \cap \{X_j = k-1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{1 \leqslant Y_j \leqslant k+1\} \cap \{X_j = k+1\}\big) \\
= \ &\mathbb{P}\big(\{k \leqslant Y_j \leqslant n\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X_j = k-1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{1 \leqslant Y_j \leqslant k+1\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X_j = k+1\}\big) \quad \textit{(car } Y_j \perp\!\!\!\perp X_j\textit{)} \\
= \ &\frac{n-k+1}{n+1} \times \mathbb{P}\big(\{X_j = k-1\}\big) + \frac{k+1}{n+1} \times \mathbb{P}\big(\{X_j = k+1\}\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_{j+1} = k\}\big) = \frac{n-k+1}{n}\, \mathbb{P}\big(\{X_j = k-1\}\big) + \frac{k+1}{n}\, \mathbb{P}\big(\{X_j = k+1\}\big)}$$

□

6. Rappeler pourquoi la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ existe au moins sur l'intervalle $]-1, 1[$.

Démonstration.
Remarquons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \big|\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\big| \leqslant 1$$

On en déduit : $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\, t^n\right) \geqslant \mathrm{R_{cv}}\left(\sum 1 \times t^n\right) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\, t^n \text{ est définie au moins sur l'intervalle }]-1, 1[.}$$

Commentaire

- En réalité, on peut démontrer que tout fonction génératrice G_X est définie sur $[-1, 1]$. On complète la question précédente en remarquant que les séries numériques $\sum \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)1^n$ et $\sum \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)(-1)^n$ sont (absolument) convergentes. En effet :

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}, \ \big|\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\,(-1)^n\big| = \big|\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\big| \times \big|(-1)^n\big| = \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) \\
\text{et} \quad &\forall n \in \mathbb{N}, \ \big|\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\,1^n\big| = \big|\mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)\big| = \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)
\end{aligned}$$

et la série numérique $\sum \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big)$ est convergente. En effet, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, la famille $\big(\{X = n\}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = n\}\big) = 1$.

□

7. On note G_j la fonction génératrice de X_j, pourquoi G_j est-elle polynomiale ?

Démonstration.
Comme $G_j(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, alors :

$$\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![, \ \mathbb{P}\big(\{X_j = k\}\big) = 0$$

Comme les coefficients de la série entière $\sum \mathbb{P}\big(\{X = m\}\big)\ t^m$ sont nuls à partir d'un certain rang, $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum \mathbb{P}\big(\{X = m\}\big)\ t^m\right) = +\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_j(t) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\ t^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\ t^k$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } G_j \text{ est une fonction polynomiale de degré au plus } n.}$$

Commentaire

- On retiendra que la fonction génératrice de toute variable aléatoire X finie (c'est-à-dire telle que $X(\Omega)$ est un ensemble fini) est polynomiale. C'est notamment le cas des variables aléatoires qui suivent des lois usuelles finies (loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme).
- On peut aussi démontrer le résultat demandé en remarquant que pour tout $t \in \,]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} G_j(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\ t^k \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ \boxed{k \in [\![0,n]\!]}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_j = k\}\big)\ t^k + \cancel{\sum_{\substack{k=0 \\ \boxed{k \notin [\![0,n]\!]}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_j = k\}\big)\ t^k} \qquad \textit{(car } X_j(\Omega) \subset [\![0,n]\!]\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\ t^k \end{aligned}$$

□

8. Exprimer $\mathbb{E}(X_j)$, $\mathbb{E}\big(X_j(X_j-1)\big)$ et $\mathbb{V}(X_j)$ en fonction de G_j (formule attendue sans démonstration).

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après le cours : } \mathbb{E}(X_j) = G_j'(1),\ \mathbb{E}\big(X_j\,(X_j-1)\big) = G_j''(1), \\ \text{et } \mathbb{V}(X_j) = G_j''(1) + G_j'(1) - \big(G_j'(1)\big)^2.\end{array}}$$

□