Interrogation de cours 1

1. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$. On utilisera la règle de d'Alembert.

Démonstration.
On définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{|\, u_{n+1} \,|}{|\, u_n \,|} \\
&= \frac{u_{n+1}}{u_n} && \textit{(car : } \forall m \in \mathbb{N},\ u_m \geqslant 0\textit{)} \\
&= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} \\
&= \frac{\cancel{(n+1)} \times \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \times (n+1)^n} \times \frac{n^n}{\cancel{n!}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\
&= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \\
&= \exp\left((-n) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)
\end{aligned}$$

- Or :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \qquad \textit{(car } \tfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\textit{)}$$

$$\text{donc} \qquad (-n) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (-n) \times \frac{1}{n} = -1$$

Finalement, par composition de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \exp\left((-n) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = \exp(-1)$$

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{\mathrm{e}} \in [0, 1[$, alors, par règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente.

□

2. Déterminer la nature de la série $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)$. On écrira un développement asymptotique.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{lrcl} & \cos(x) & = & 1 - \frac{1}{2}\, x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x) \\ \text{donc} & -\cos(x) & = & -1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x) \\ \text{donc} & 1 - \cos(x) & = & \frac{1}{2}\, x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{En particulier : } 1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}\, x^2.}$$

- On en déduit :

$$\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{n^2}$$

Finalement :
× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$
× $\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
× La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série} \\ \sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \text{ est (absolument) convergente.}\end{array}}$$

□

3. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ à l'aide d'un théorème de comparaison.

Démonstration.
× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$
× $\left| \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$
× La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série} \\ \sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) \text{ est (absolument) convergente.}\end{array}}$$

□

4. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sin\left(1+2\ \cos\left(n\ \frac{\pi}{3}\right)\ \right)}{5\, n^2}$ à l'aide d'un théorème de comparaison.

Démonstration.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$

× $\dfrac{\sin\left(1+2\ \cos\left(n\ \frac{\pi}{3}\right)\ \right)}{5\, n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

× La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série } \sum \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \text{ est (absolument) convergente.}}$$

□

5. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n!}$ à l'aide d'un théorème de comparaison.

Démonstration.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$

× $\dfrac{\sqrt{n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

× La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la série } \sum \frac{\sqrt{n}}{n!} \text{ est (absolument) convergente.}}$$

□