Interrogation de cours 2

1. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$.

Démonstration.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^3} \geqslant 0$

× $\left|\ \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)\ \right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\ \dfrac{(-1)^n}{n^3}\ \right| = \dfrac{1}{n^2}$

× La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right) \text{ est (absolument) convergente.}}$$

Commentaire

- Lorsque l'on souhaite utiliser un théorème de comparaison des séries **à termes positifs**, il faut vérifier que l'on travaille avec des séries ...**à termes positifs**. De ce faite, écrire :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

  ne permet pas directement de conclure. Composer par la valeur absolue (c'est une composition autorisée sur les équivalents) permet de s'assurer que les termes sont bien positifs et ainsi d'utiliser le théorème d'équivalence des séries à termes positifs.

- La suite $\big((-1)^n\big)$ n'est évidemment pas de suite constant (si m est pair, $(-1)^m = 1 > 0$ et si m est impair, $(-1)^m = 1 < 0$). Il en est de même de la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ et de la suite $\left(\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)\right)$. En effet :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^m}{m}\right) = \begin{cases} \ln\left(1-\dfrac{1}{m}\right) < \ln(1) = 0 & \textit{si } m \textit{ pair} \\[2ex] \ln\left(1+\dfrac{1}{m}\right) > \ln(1) = 0 & \textit{si } m \textit{ impair} \end{cases}$$

- Il est possible d'effectuer le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3}\right) &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^3}}_{} + \underbrace{\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{} \\ &= \quad v_n \quad + \quad w_n \end{aligned}$$

Commentaire

- Il s'agit alors de démontrer que :
  - × la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^3}$ est convergente. Il existe au moins deux manières de le démontrer :
    - ▸ le plus simple est de démontrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^3}$ est absolument convergente (on peut utiliser directement le critère de Riemann car $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right| = \dfrac{1}{n^3}$).
    - ▸ on peut aussi utiliser le critère spécial des séries alternées. C'est plus long à écrire car il faut rappeler les 3 hypothèses. De manière générale, si une série n'est pas à termes positifs, le bon réflexe est tout d'abord de vérifier si elle est absolument convergente et, dans le cas où cette première vérification échoue, de procéder alors à une étude plus précise.
  - × la série $\sum w_n$ est (absolument) convergente. Pour ce faire, on utilise le critère de négligeabilité des séries à termes positifs. Attention à cette étape. Ici on écrit :

$$w_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{et pas} \quad w_n = \frac{1}{n^3}$$

  Ces deux égalités sont très différentes. En particulier : $\dfrac{1}{n^3} \cancel{=} \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

  On conclut alors en remarquant que le terme général de la série étudiée s'écrit comme somme de termes généraux de deux séries convergentes.

□

2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sin\left(e^n \ \cos(n)\right) \times n^2}{2^n}$.

Démonstration.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$

× $\left|\dfrac{\sin\left(e^n \ \cos(n)\right) \times n^2}{2^n}\right| = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour le démontrer, on effectue le quotient :

$$\left|\frac{\frac{\sin\left(e^n \ \cos(n)\right)\times n^2}{2^n}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \frac{n^4}{2^n} \times \sin\left(e^n \ \cos(n)\right)$$

× La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la série } \sum \frac{\sin\left(e^n \ \cos(n)\right) \times n^2}{2^n} \text{ est (absolument) convergente.}}$$

□

3. On souhaite déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{1-\frac{(-1)^n}{n}} - 1$.

a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ dans un voisinage de } 0 : \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right).}$$

Commentaire

- Il est demandé un développement limité à l'ordre 2. Il était aussi possible, d'écrire ce développement limité sous la forme :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \underset{x\to 0}{O}\left(x^2\right)$$

Utiliser la relation de domination permet de gagner un rang dans l'écriture du développement limité.

- Rappelons que de manière générale, si une fonction f est de classe $\mathscr{C}^{m+1}$ au voisinage de 0 alors elle admet un $\text{DL}_m(0)$ qui s'écrit :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \underset{x\to 0}{o}\left(x^m\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \underset{x\to 0}{O}\left(x^{m+1}\right)}$$

- Rappelons que la série géométrique $\sum x^n$ est convergente si et seulement si sa raison x est un élément de $]-1,1[$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

On reviendra sur cet exemple dans le cours sur les séries entières. En attendant, remarquons que le développement limité en 0 de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ correspond aux premiers termes de la somme infinie de terme définissant la quantité $g(x)$. □

b) En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{1}{1-\frac{(-1)^n}{n}} - 1$.

Démonstration.

- Comme $\dfrac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut écrire le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\frac{(-1)^n}{n}} &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}} + \underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \quad v_n \quad + \quad w_n\end{aligned}$$

- Or :
  × la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente car elle vérifie le critère spécial des séries alternées.
  En effet :
    ▸ la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est alternée.
    ▸ la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|\right)$ est décroissante.
    ▸ $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

× la série $\sum w_n$ est (absolument) convergente.
En effet :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
- $w_n \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination, la série $\sum w_n$ est bien(absolument) convergente.

$\boxed{\text{Le terme général de la série } \sum \dfrac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{n}} - 1 \text{ s'écrit comme somme des termes généraux de deux séries convergentes. La série } \sum \dfrac{1}{1 - \frac{(-1)^n}{n}} - 1 \text{ est donc convergente.}}$ $\square$