Interrogation de cours 3

1. ***a)*** La famille $\left(0_{\mathbb{R}[X]}, 1, 2+X, 1-X^2\right)$ est-elle libre ? Justifier.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La famille } \left(0_{\mathbb{R}[X]}, 1, 2+X, 1-X^2\right) \text{ n'est pas libre car elle contient } 0_{\mathbb{R}[X]}.}$$ □

b) Démontrer que la famille $\left(X - X^2, X^3 - X^5, X\right)$ est libre. On exige ici l'utilisation de la méthode correspondant à la vérification de la définition de liberté.

Démonstration.
Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.
On suppose : $\lambda \cdot \left(X - X^2\right) + \mu \cdot \left(X^3 - X^5\right) + \nu \cdot X = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad (*)$.

Or : $(*) \iff (\lambda + \nu) \cdot X - \lambda \cdot X^2 + \mu \cdot X^3 - \mu \cdot X^5 = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & & & + & \nu & = & 0 \\ -\lambda & & & & & = & 0 \\ & & \mu & & & = & 0 \\ & & -\mu & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad \textit{(car } (1, X, X^2, X^3, X^4, X^5) \textit{ est une famille libre de } \mathbb{R}[X]\textit{)}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & & & + & \nu & = & 0 \\ & & & & \nu & = & 0 \\ & & \mu & & & = & 0 \\ & & -\mu & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & & & + & \nu & = & 0 \\ & & \mu & & & = & 0 \\ & & & & \nu & = & 0 \\ & & -\mu & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{ \lambda = \mu = \nu = 0 \right.$$
(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \left(X - X^2, X^3 - X^5, X\right) \text{ est donc libre.}}$$ □

c) De quelle propriété la question précédente est-elle une illustration ? *(à citer avec précision !)*

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Toute famille de polynômes échelonnée en degrés et qui ne contient pas} \\ \text{le polynôme nul est libre.}\end{array}}$$ □

2. Démontrer que la famille $\left(1+X+X^2, 1-X+X^2, 3X-2X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\left(1+X+X^2, 1-X+X^2, 3X-2X^2\right)$ est libre.

  Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.
  On suppose : $\lambda \cdot \left(1+X+X^2\right) + \mu \cdot \left(1-X+X^2\right) + \nu \cdot \left(3X-2X^2\right) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ $(*)$.

  $$\begin{array}{lll}
  \text{Or : } (*) & \Longleftrightarrow & \left(\lambda+\mu\right)\cdot 1 + \left(\lambda-\mu+3\nu\right)\cdot X + \left(\lambda+\mu-2\nu\right)\cdot X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
  & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & \mu & & & = & 0 \\ \lambda & - & \mu & + & 3\nu & = & 0 \\ \lambda & + & \mu & - & 2\nu & = & 0 \end{array}\right. \quad \textit{(car } (1,X,X^2) \textit{ est une famille libre de } \mathbb{R}[X]\textit{)} \\
  & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & \mu & & & = & 0 \\ & - & 2\mu & + & 3\nu & = & 0 \\ & & & - & 2\nu & = & 0 \end{array}\right. \\
  & \Longleftrightarrow & \{\lambda = \mu = \nu = 0 \\
  & & \textit{(par remontées successives)}
  \end{array}$$

  $$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} = \left(1+X+X^2, 1-X+X^2, 3X-2X^2\right) \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est :
  × libre,
  × telle que : $\text{Card}\,(\mathcal{F}) = 3 = \dim\Big(\mathbb{R}_2[X]\Big)$.

  $$\boxed{\text{On en conclut que la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

Commentaire

On aurait aussi pu démontrer que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour ce faire, le plus simple est d'utiliser les manipulations algébriques autorisées sur les espaces vectoriels engendrés par une partie. Attention à ne pas confondre espace vectoriel engendré par une partie et famille : l'espace vectoriel engendré reste inchangé par certaines manipulations algébriques mais la partie est évidemment modifiée par ces manipulations (c'est tout le but de la méthode !). Ici, on pouvait écrire :

$$\begin{array}{cl}
& \text{Vect}\left(1+X+X^2, 1-X+X^2, 3X-2X^2\right) \\
= & \text{Vect}\left(1+X+X^2, \left(1-X+X^2\right)-\left(1+X+X^2\right), 3X-2X^2\right) \\
= & \text{Vect}\left(1+X+X^2, -2\,X, 3X-2X^2\right) \\
= & \text{Vect}\left(1+X+X^2, X, 3X-2X^2\right) \\
= & \text{Vect}\left(1+X+X^2, X, \left(3X-2X^2\right)-3\,X\right) \\
= & \text{Vect}\left(1+X+X^2, X, -2X^2\right) \\
= & \text{Vect}\left(1+X+X^2, X, X^2\right) \\
= & \text{Vect}\left(\left(1+X+X^2\right)-X-X^2, X, X^2\right) \\
= & \text{Vect}\left(1, X, X^2\right) \\
= & \mathbb{R}_2[X]
\end{array}$$

□

3. On note : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

Déterminer une base de F et sa dimension (on justifiera).

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
X \in F & \iff & (A - 2\,I)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(en choisissant z comme variable auxiliaire)} \\[2mm]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

- On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \ x = -z \ \text{ et } \ y = 0 \ \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:
  - × engendre F,
  - × est libre car est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  C'est donc une base de F.

$$\boxed{\text{On en conclut enfin : } \dim(F) = \operatorname{Card}(\mathcal{F}) = 1.}$$

□