Interrogation de cours 4

1. Justifier (avec précision) que la famille $\big(1 - X^2, 2 + X^2 + 3X^5, 1 - 2\,X\big)$ est libre.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La famille } \big(1 - X^2, 2 + X^2 + 3X^5, 1 - 2\,X\big) \text{ est échelonnée en degrés et ne contient pas le polynôme nul. Elle est donc libre.}}$$

□

2. Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(1 - X - X^2, 2 - X^2, -1 + 3X\big)$ est libre. On exige ici l'utilisation de la méthode correspondant à la vérification de la définition de liberté.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
On suppose : $\lambda_1 \cdot \big(1 - X - X^2\big) + \lambda_2 \cdot \big(2 - X^2\big) + \lambda_3 \cdot \big(- 1 + 3X\big) = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad (*)$.

Or : $(*) \iff \big(\lambda_1 + 2\,\lambda_2 - \lambda_3 \big) \cdot 1 + \big(- \lambda_1 + 3\,\lambda_3 \big) \cdot X + \big(- \lambda_1 - \lambda_2 \big) \cdot X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & & & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{(car } (1, X, X^2) \textit{ est une famille libre de } \mathbb{R}[X]\textit{)}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & 4\,\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \big(1 - X - X^2, 2 - X^2, -1 + 3X\big) \text{ est donc libre.}}$$

□

3. Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration.

- La famille $\mathcal{F}$ est :
  - × libre,
  - × telle que : $\text{Card}\,(\mathcal{F}) = 3 = \dim\Big(\mathbb{R}_2[X]\Big)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

Commentaire

- Pour démontrer que $\mathcal{F}$ est base de $\mathbb{R}_2[X]$, on aurait aussi pu démontrer qu'elle est libre et génératrice $\mathbb{R}_2[X]$ ou démontrer qu'elle est génératrice $\mathbb{R}_2[X]$ et de cardinal minimal (en l'occurrence 3).
- Dans le cas où l'on étudie un espace vectoriel dont on connaît la dimension, on préférera ne pas démontrer le caractère libre et générateur de l'espace car c'est plus long que de ne démontrer que l'une ou l'autre de ces propriétés et de conclure par argument de dimension.
- Il faut savoir démontrer le caractère générateur d'une famille de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour ce faire, le plus simple est d'utiliser les manipulations algébriques autorisées sur les espaces vectoriels engendrés par une partie. Attention à ne pas confondre espace vectoriel engendré par une partie et partie : l'espace vectoriel engendré reste inchangé par certaines manipulations algébriques mais la partie est évidemment modifiée par ces manipulations (c'est tout le but de la méthode !). Ici, on pouvait écrire :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Vect}\left(1 - X - X^2, 2 - X^2, -1 + 3X\right) \\
= \ & \mathrm{Vect}\left(1 - X - X^2, 1 + X, -1 + 3X\right) \\
= \ & \mathrm{Vect}\left(1 - X - X^2, 1 + X, -4\right) \\
= \ & \mathrm{Vect}\left(1 - X - X^2, 1 + X, 1\right) \\
= \ & \mathrm{Vect}\left(1 - X - X^2, X, 1\right) \\
= \ & \mathrm{Vect}\left(X^2, X, 1\right) \\
= \ & \mathbb{R}_2[X]
\end{aligned}$$

$\square$

4. On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

Déterminer une base de F et sa dimension (on justifiera).

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
X \in F & \Longleftrightarrow & (A - 3\,I)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & & & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & + & 2\,y & = & z \\ & & 2\,y & = & 2\,z \end{array} \right. \qquad \textit{(en choisissant } z \textit{ comme variable auxiliaire)} \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & & & = & -z \\ & & 2\,y & = & 2\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

- On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \ x = z \ \text{ et } \ y = z \ \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:
  - × engendre F,
  - × est libre car est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  C'est donc une base de F.

$$\boxed{\text{On en conclut enfin : } \dim(F) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) = 1.}$$

□