Interrogation de cours 5

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \Rightarrow \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

2. On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit l'application φ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right) \end{array}$$

a) Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.

c) L'application φ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Expliquer.

d) Justifier que la famille $\mathscr{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ constituée des polynômes $Q_0(X) = 1$, $Q_1(X) = 1 - 2X$ et $Q_2(X) = 1 - 6X + 6X^2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

e) Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On la notera P.

f) Démontrer que P est inversible d'inverse $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Que représente Q ?

g) On note : $C = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (on ne demande pas de le démontrer).

En déduire, **sans calcul**, les valeurs de $\varphi(Q_0)$, $\varphi(Q_1)$, $\varphi(Q_2)$.

h) Donner le lien entre A, P, C et Q.