Interrogation de cours 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$.

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

On se donne une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère f l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \;=\; ({}^tA)\, M + M\, A$$

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En effet : ${}^t0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = -0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$.

× Comme $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, M vérifie : ${}^tM = -M$.

× Comme $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, N vérifie : ${}^tN = -N$.

Démontrons : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) = -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)$).

$$\begin{aligned}
{}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) &= \lambda \cdot {}^tM + \mu \cdot {}^tN \\
&= \lambda \cdot (-M) + \mu \cdot (-N) \qquad \textit{(car } (M,N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2\textit{)} \\
&= -\lambda \cdot M - \mu \cdot N \\
&= -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

□

2. Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer : $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(f(M)\big) = -f(M)$).

$$\begin{aligned}
{}^t\big(f(M)\big) &= {}^t\Big(\big({}^tA\big) \times M + M \times A\Big) \\
&= {}^t\Big(\big({}^tA\big) \times M\Big) + {}^t\big(M \times A\big) \qquad \textit{(par linéarité de la transposée)} \\
&= \big({}^tM\big)\Big({}^t\big({}^tA\big)\Big) + \big({}^tA\big)\,\big({}^tM\big) \\
&= (-M)\; A + \big({}^tA\big)\; (-M) \qquad \textit{(car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\textit{)} \\
&= -MA - ({}^tA)\, M \\
&= -f(M)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

□

3. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire
  Soit $(M,N) \in \big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)^2$ et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) & = & ({}^tA)\,(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) + (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)\,A \\ & = & \lambda \cdot ({}^tA)M + \mu \cdot ({}^tA)N + \lambda \cdot MA + \mu \cdot NA \\ & = & \lambda \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) + \mu \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) \\ & = & \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est bien une application linéaire.}}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
  D'après la question précédente, pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien à valeurs dans } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

□

On considère dans la suite le cas $n = 3$. On considère les trois matrices :

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Enfin on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On admet que la famille $\mathscr{B} = (J,K,L)$ est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$. On la note T.
(faire les calculs au brouillon et écrire uniquement les résultats permettant d'écrire T)

Démonstration.

- $$\begin{array}{rcl} f(J) & = & ({}^tA)\,J + J\,A \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f(J) = (-1) \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

- $$\begin{aligned} f(K) &= ({}^tA)\,K + K\,A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f(K) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0 \cdot J + 0 \cdot K + 0 \cdot L \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(K)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- $$\begin{aligned} f(L) &= ({}^tA)\,L + L\,A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f(L) = 0 \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } T = \mathrm{Mat}_{(J,K,L)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

□

5. Déterminer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f.

Démonstration.
Par défintiion :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(f) &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{(J,K,L)}(f)\right) \\ &= -1 + 0 - 1 \\ &= -2 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \det(f) &= \det\left(\mathrm{Mat}_{(J,K,L)}(f)\right) \\ &= (-1) \times 0 \times (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(car T est une matrice diagonale)

□

6. Que peut-on déduire du calcul du déterminant ?

Démonstration.

> Comme $\det(f) = 0$ alors l'endomorphisme f n'est pas bijectif (et don pas injectif car il y a équivalence entre injectivité et bijectivité pour toute application linéaire dont l'espace vectoriel de départ et d'arrivée sont de mêmes dimensions).

□