Nom et prénom :

PSI
Mathématiques

Interrogation 9

1. Pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. L'application :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^\Omega & \times & \mathbb{R}^\Omega & \to & \mathbb{R} \\ (X & , & Y) & \mapsto & \mathbb{E}(XY) \end{array}$$

est-elle un produit scalaire ? Justifier la réponse.

Lois discrètes usuelles : formulaire

	Notation	Paramètres	Loi de X	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
Loi uniforme	$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$n \in \mathbb{N}^*$	$X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) = \dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	
	$\mathcal{U}([\![a,b]\!])$	$(a,b) \in \mathbb{N}^2$ $b \geqslant a$	$X(\Omega) = [\![a,b]\!]$ $\forall k \in [\![a,b]\!],\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) = \dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	
Loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(1,p)$	$p \in]0,1[$	$X(\Omega) = \{0,1\}$ $\mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) = p$ et $\mathbb{P}\big(\{X=0\}\big) = 1-p$	p	$p\,q$
Loi binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$	$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ $\forall k \in$	$n\,p$	
Loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$p \in]0,1[$	$X(\Omega) =$ $\forall k \in$		$\dfrac{q}{p^2}$
Loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) = \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}$		