Interrogation de cours 9

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

Démonstration.

- Soit $x_0 \in [0,+\infty[$. Deux cas se présentent.
  - Si $x_0 = 0$:

$$f_n(0) \;=\; \frac{1}{1^n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

  - Si $x_0 \in \,]0,+\infty[$:

$$f_n(x_0) \;=\; \frac{1}{\left(1+{x_0}^2\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \left(\text{ car, comme } 1+{x_0}^2 > 1 \text{ alors } \left(1+{x_0}^2\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (f_n) \text{ converge simplement sur } [0,+\infty[\text{ vers } f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

□

2. Soit $a > 0$. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a,+\infty[, \quad |f_n(x) - f(x)| \;&=\; \left| \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} \right| && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &=\; \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} && \textit{(car toutes les quantités en présences sont positives)} \\ &=\; \frac{1}{\left(1+a^2\right)^n} \end{aligned}$$

En effet, pour tout $x \in [a,+\infty[$:

$$\begin{array}{llcll} & x & \geqslant & a & \\ \text{donc} & x^2 & \geqslant & a^2 & \textit{(car la fonction élévation au carré est croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \text{donc} & \left(1+x^2\right)^n & \geqslant & \left(1+a^2\right)^n & \textit{(car la fonction } x \mapsto x^n \textit{ est croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \text{donc} & \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^n} & \leqslant & \dfrac{1}{\left(1+a^2\right)^n} & \end{array}$$

- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur $[a,+\infty[$.

$$\boxed{\text{De plus : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \;\leqslant\; \|f_n - f\|_{\infty,[a,+\infty[} \;\leqslant\; \frac{1}{\left(1+a^2\right)^n}}$$

- Or :

  × $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

  × $\dfrac{1}{\left(1+a^2\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $1+a^2>0$)

  On en déduit, par théorème d'encadrement : $\|f_n - f\|_{\infty,[a,+\infty[} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ converge uniformément sur tout intervalle du type } [a,+\infty[\text{ où } a>0.}$

Commentaire

- On utilise ici la caractérisation séquentielle de la convergence uniforme, à savoir :

$$\boxed{\begin{array}{c}(f_n) \text{ converge uniformément} \\ \text{sur } I \text{ vers } f\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Il existe une suite } (\delta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de limite nulle,} \\ \text{telle que, il existe un rang } n_0 \in \mathbb{N} : \\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ \left|f_n(x)-f(x)\right| \ \leqslant\ \delta_n\end{array}\right.}$$

- Cet exercice illustre la manière classique de procéder pour démontrer la convergence uniforme d'une suite de focntion. Plus précisément, on procède comme suit.

1) Convergence simple
Cette étape a été décrite dans la question précédente. Il s'agit de trouver la limite simple f de la suite (f_n).

2) Convergence uniforme

  (i) on commence par fixer un enter n : « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

  (ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

  × $\left|f_n(x)-f(x)\right| \ \leqslant\ \delta_n$

  × δ_n **ne fait pas apparaître** x,

  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

  Insistons sur le fait que la quantité δ_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\left\{\left|f_n(x)-f(x)\right| \mid x \in I\right\}$. Il est d'ailleurs préférable d'utiliser les méthodes de majoration usuelles pour déterminer δ_n et réserver une éventuelle étude la fonction $f_n - f$ (permettant de déterminer la valeur exacte de $\|f_n - f\|_{\infty,I}$) au cas où ces techniques ne sont pas assez fines pour aboutir.

- Notons enfin que la majoration : $\left|\, f_n(x)-f(x) \,\right| \ \leqslant\ 1$ répond à la contrainte d'obtention une quantité δ_n qui ne fait pas apparaître x. Cependant, cette majoration est trop brutale et la quantité obtenue n'admet pas de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Il convient donc, lors de l'étape de majoration, de bien veiller à conserver la partie qui va permettre d'obtenir cette limite nulle.

- On pourrait aussi écrire :

$$\left|\, f_n(x)-f(x) \,\right| \ \leqslant\ \frac{1}{a^{2n}}$$

  Le même problème apparaît alors : pour avoir $\dfrac{1}{a^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il faudrait $a^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui n'est vrai que si $a>1$.

□

3. On souhaite maintenant démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

a) En considérant une suite (x_n) (de limite nulle) convenablement choisie, répondre à la question. On veillera à rédiger le plus rigoureusement possible.

Démonstration.

- Notons (x_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \ = \ \sqrt{\dfrac{1}{n}}$.
  Remarquons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0, +\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |\, f_n(x_n) - f(x_n) \,| \ &= \ \frac{1}{\left(1 + \left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2\right)^n} \\ &= \ \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \ \frac{1}{\exp\left(\ n \ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)} \end{aligned}$$

  Or : $n \ \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ n \ \dfrac{1}{n} \ = \ 1$. Ainsi : $\exp\left(\ n \ \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ \exp(1)$.
  Et : $|\, f_n(x_n) - f(x_n) \,| \ = \ \dfrac{1}{\exp\left(\ n \ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
- On procède par l'absurde. Supposons que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f.
  Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0, +\infty[$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| f_n(x_n) - f(x_n) \right| \ \leqslant \ \|f_n - f\|_{\infty, [0, +\infty[}$$

  Or : $|\, f_n(x_n) - f(x_n) \,| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ \mathrm{e}^{-1}$.
  Par passage à la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty, [0, +\infty[} \ \geqslant \ \lim\limits_{n\to+\infty} |\, f_n(x_n) - f(x_n) \,| = \mathrm{e}^{-1} > 0$.
  Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (f_n) \text{ ne converge pas uniformément vers } f \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

Commentaire

- Comment trouver la suite (x_n) utilisée dans la démonstration ? Pour cela, il faut se convaincre que c'est le point $0 \in I$ qui pose problème. C'est d'ailleurs pour cela que l'on traite, en question ***2.*** de la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. L'idée est alors de trouver une suite $(x_n) \in [0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 (point qui pose problème). Il est à noter que si c'est $+\infty$ qui posait problème, on considérerait de manière usuelle la suite (x_n) de terme général :

$$x_n \ = \ n$$

  Évidemment, il n'existe pas de suite (x_n) qui fonctionne à tous les coups. Il faut donc faire preuve de qualité d'adaptation et considérér une suite (x_n) pertinente pour l'exercice proposé.
- On aurait aussi pu considérer dans cette question la suite (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n = \frac{1}{n}$$

$\square$

b) Répondre de nouveau à la question en exploitant une propriété de la fonction f.

Démonstration.
On procède par l'absurde.
On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f.

(i) Caractère $\mathscr{C}^0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

(ii) Convergence uniforme

La suite de fonctions (f_n) converge normalement (donc uniformément) sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. Absurde ! (car f n'est pas continue en 0)

Ainsi la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f. □