Autour des formules de Taylor

I. Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace

Théorème 1.

Soit I un intervalle réel et soit $a \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

- *On a alors :*

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt}$$

- *On appelle reste de Laplace à l'ordre n de la fonction f le réel :*

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt$$

Remarque

On introduit I, a, n et f comme dans le théorème. Soit $x \geqslant a$.

- Remarquons que le reste intégral est bien défini :
  - × tout d'abord, comme $a \in I$ et $x \in I$, alors : $[a, x] \subset I$.
  - × comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, alors en particulier, la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur I. En particulier, $f^{(n+1)}$ est continue sur le **segment** I.
- La formule de Taylor est souvent utilisée en $a = 0$ (pour peu que I soit un intervalle contenant 0). Elle s'écrit alors :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt}$$

- La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ n'est autre que la partie polynomiale du développement limité de la fonction f pour x au voisinage de a. On y reviendra.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, on a :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt$$

▶ **Initialisation** :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Soit $x \in I$.

- D'une part :

$$\int_a^x \frac{f^{(0+1)}(t)}{0!}(x-t)^0\ dt = \int_a^x f'(t)\ dt = [\ f(t)\ ]_a^x = f(x) - f(a)$$

- D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 = f(a)$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

(*i.e.* pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\ dt$$)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I et soit $x \in I$.

- En particulier, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.
  Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt$$

- On effectue alors une intégration par parties (IPP) pour déterminer le reste intégral.

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & f^{(n+1)}(t) & & u'(t) & = & f^{(n+2)}(t) \\ v'(t) & = & \dfrac{1}{n!}\,(x-t)^n & & v(t) & = & \cancel{-}\dfrac{1}{n!} \times \left(\cancel{-}\dfrac{1}{n+1}\right)\,(x-t)^{n+1} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités a et x (car f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I et $(a,x) \in I^2$).

On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \\ = & \left[f^{(n+1)}(t) \left(-\frac{1}{(n+1)!}\,(x-t)^{n+1}\right) \right]_a^x \\ & -\int_a^x f^{(n+2)}(t) \left(-\frac{1}{(n+1)!}\,(x-t)^{n+1}\right) dt \\ = & \ 0 + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \ + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}\,(x-t)^{n+1}\ dt \\ = & \ \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \ + \ R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} + R_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$. □

II. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 2.

Soit I un intervalle réel et soit $a \in I$. On suppose $a \geqslant x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

On note $M = \max\limits_{t\in[a,x]} \left(\left|f^{(n+1)}(t)\right|\right)$.

$$\boxed{\forall x \in I,\ |R_n(x)| \ = \ \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \right| \ \leqslant \ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ M}$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \right| \ = \ \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\ dy \right|$$

Or, par inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\ dy \right| \ \leqslant \ \int_a^x \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n \right| dy$$

- De plus, soit $t \in [a,x]$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n \right| &= \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{|n!|} \times \left|(x-t)^n\right| \\ &= \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{n!}\,|x-t|^n \\ &= \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{n!}\,(x-t)^n && \textit{(car } t \leqslant x\textit{)} \\ &\leqslant \frac{M}{n!}\,(x-t)^n && \textit{(par définition de } M\textit{)} \end{aligned}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant (en effet, on a supposé $a \leqslant x$) :

$$\int_a^x \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \ (x-t)^n \right| \ dy \ \leqslant \ \int_a^x \ \frac{M}{n!} \ (x-t)^n \ dy$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_a^x \ \frac{M}{n!} \ (x-t)^n \ dy \quad &= \quad \frac{M}{n!} \ \int_a^x \ (x-t)^n \ dy \\
&= \quad \frac{M}{n!} \ \left[-\frac{1}{n+1} \ (x-t)^{n+1} \ \right]_a^x \\
&= \quad \frac{M}{n!} \times \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \\
&= \quad \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \ M
\end{aligned}$$

□