

Propriétés des lois Gamma, gamma et d'Erlang (HP)

Avant-propos : loi de la somme de v.a.r. à densité

Théorème 1.

Soient X et Y deux v.a.r. de densités respectives f_X et f_Y .

On suppose que les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

On considère la fonction $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$.

On suppose que la fonction h est (définie et) continue sur \mathbb{R} sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.

Alors la v.a.r. $X + Y$ est une v.a.r. à densité et h est une densité de $X + Y$.

Remarque

- La fonction h , si elle existe, est appelée **produit de convolution** des fonctions f_X et f_Y . On note généralement cette fonction $f_X * f_Y$.
- Le produit de convolution est commutatif. Autrement dit, sous réserve d'existence, on a :

$$f_X * f_Y = f_Y * f_X$$

Ce qui s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_Y(t) dt$$

(il suffit pour cela de poser le changement de variable $u = x - t$)

Remarque (CULTURE)

- Si la fonction f_Y est bornée, il est simple de démontrer que la fonction h existe. Démonstrons-le.

Supposons que la fonction f_Y est bornée. Il existe donc $M \geq 0$ tel que :

$$\forall v \in \mathbb{R}, |f_Y(v)| \leq M$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\times \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq f_X(t) f_Y(x-t) \leq M f_X(t) (*)$$

\times L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt$ est convergente car la fonction f_X est une

densité de probabilité. Il en est de même de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} M f_X(t) dt$.

Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$ est convergente.

- Si la fonction f_X est bornée, alors, en reprenant le raisonnement précédent, on démontre l'existence de la fonction $f_Y * f_X$. Or, par commutativité du produit de convolution, cela démontre l'existence de $f_X * f_Y$. Ainsi, le caractère borné de l'une ou l'autre des fonctions f_X ou f_Y assure l'existence du produit de convolution $f_X * f_Y$.
- L'intégrande $u_x : t \mapsto f_X(t) f_Y(x-t)$ fait apparaître un paramètre x . On dit alors que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$ est une intégrale à paramètre.

Le théorème classique pour démontrer la continuité de la fonction $f_X * f_Y :$

$x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$ requiert l'étude de la continuité des fonctions $t \mapsto u_x(t)$ (pour tout x) et $x \mapsto u_x(t)$ (pour tout t).

S'ajoute de plus une hypothèse de domination du type :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |u_x(t)| \leq g(t)$$

où la fonction g est elle-même continue et est l'intégrande d'une intégrale convergente. Dans le cas où f_X (resp. f_Y) est bornée, l'inégalité (*) permet d'établir cette hypothèse de domination.

À RETENIR

- Sous les hypothèses du théorème, la somme $X + Y$ de deux v.a.r. **à densité** et **indépendantes** est une v.a.r. à densité dont une densité est le produit de convolution $f_X * f_Y$.
- Le caractère borné de la fonction f_X (resp. f_Y) est un cadre idéal pour établir les hypothèses du théorème.

I. La fonction Gamma

I.1. Définition

Définition

On note Γ la fonction définie par :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

I.2. Propriétés

Théorème 2.

La fonction Γ vérifie les propriétés suivantes.

1) La fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

2) $\Gamma(1) = 1$

3) $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

4) On déduit des propriétés précédentes : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$

Remarque

- La propriété 4) établit que la fonction Γ prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des réels strictement positifs.
- Toutes ces propriétés peuvent se démontrer dans le cadre du programme ECE (cf TD).

II. Loi gamma

II.1. Densité

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit la **loi gamma** de paramètre $\alpha > 0$ si :

a) $X(\Omega) =]0, +\infty[$

b) Lav.a.r. X admet pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t} & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases} \end{cases}$$

- On utilisera la notation $X \leftrightarrow \gamma(\alpha)$ pour signifier que X suit la loi gamma de paramètre α .

Remarque

On vérifie aisément que f_X est bien une densité de probabilité :

1) f est continue sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

3) Remarquons tout d'abord :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} f_X(t) dt$$

car f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

La fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ est convergente : on reconnaît la définition de $\Gamma(\alpha)$. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} f_X(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$$

II.2. Espérance et variance

Théorème 3.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$ ($\alpha > 0$).

Alors, on a :

1) X admet une espérance. 1) X admet une variance.

2) $\mathbb{E}(X) = \alpha$ 2) $\mathbb{V}(X) = \alpha$

Remarque

- Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$. Il est simple de démontrer que la v.a.r. X admet des moments à tout ordre $r \in \mathbb{N}$.

Il suffit de remarquer que pour tout $t > 0$:

$$t^r f_X(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+r-1} e^{-t}$$

Or, d'après l'étude de la fonction Γ , l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+r-1} e^{-t} dt$ est convergente et de valeur $\Gamma(\alpha+r)$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_X(t) dt$ est convergente. Ainsi, X admet un moment d'ordre r donné par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^r) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha+r-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+r-1)(\alpha+r-2) \dots \alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

- En particulier, $\mathbb{E}(X) = \alpha$ (cas $r = 1$) et $\mathbb{E}(X^2) = (\alpha+1)\alpha$ (cas $r = 2$). Ainsi, par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \alpha(\alpha+1) - \alpha^2 = \alpha$$

II.3. Stabilité par somme des lois gamma

Théorème 4.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Soit X_1 une v.a.r. telle que $X_1 \hookrightarrow \gamma(\alpha_1)$.

Soit X_2 une v.a.r. telle que $X_2 \hookrightarrow \gamma(\alpha_2)$.

On suppose de plus que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Démonstration.

En exercice (ci-dessous). □

Exercice

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. de lois respectives $\gamma(\alpha_1)$ et $\gamma(\alpha_2)$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Enfin, pour tout $\alpha > 0$, on note h_α et f_α les fonctions définies par :

$$h_\alpha : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t^{\alpha-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et $f_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} h_\alpha$ (f_α est une densité de la loi $\gamma(\alpha)$).

1. a) On suppose $\alpha \neq 1$. Démontrer que la fonction h_α admet un maximum sur $]0, +\infty[$ en un point à déterminer.
b) En déduire que la fonction h_α est bornée sur \mathbb{R} .
c) Montrer qu'il en est de même dans le cas où $\alpha = 1$.
2. Démontrer que la v.a.r. $X_1 + X_2$ est à densité. On note $f_{X_1+X_2}$ une densité de cette v.a.r. . Que vaut $f_{X_1+X_2}$ sur l'intervalle $] -\infty, 0]$?
3. a) Pour tout $x > 0$, démontrer :

$$\int_0^x t^{\alpha_1-1} (x-t)^{\alpha_2-1} dt = x^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 u^{\alpha_1-1} (1-u)^{\alpha_2-1} du$$

b) En déduire que pour tout $x > 0$, $f_{X_1+X_2}(x)$ s'écrit sous la forme :

$$f_{X_1+X_2}(x) = c \times f_{\alpha_1+\alpha_2}(x)$$

où c est une constante qui s'écrit en fonction d'une intégrale.

c) Que vaut $\int_0^{+\infty} f_{X_1+X_2}(x) dx$? En déduire la valeur de c et conclure.

III. Loi Gamma

III.1. Densité

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit la **loi Gamma** de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si :

$$a) \quad X(\Omega) =]0, +\infty[$$

b) La v.a.r. X admet pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases} \end{cases}$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$ pour signifier que X suit la loi Gamma de paramètres α et β .

Lien avec les lois usuelles

- On peut tout d'abord remarquer :

$$\Gamma(1, \lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$$

- La loi gamma est un cas particulier de la loi Gamma. Plus précisément :

$$\Gamma(\alpha, 1) = \gamma(\alpha)$$

Remarque

On vérifie aisément que f_X est bien une densité de probabilité :

1) f est continue sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

3) Remarquons tout d'abord, comme f_X est nulle en dehors de $]0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} f_X(t) dt$$

La fonction f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Sous réserve de convergence, on obtient, à l'aide du changement de variable $u = \beta t$:

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta^\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

Cela démontre la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_X(t) dt$ et enfin :

$$\int_0^{+\infty} f_X(t) dt = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$$

III.2. Espérance et variance

Théorème 5.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$ ($\alpha > 0$ et $\beta > 0$).

Alors, on a :

1) X admet une espérance.

1) X admet une variance.

$$2) \quad \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$2) \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Remarque

- Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$. On peut démontrer que la v.a.r. X admet des moments à tout ordre $r \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, on procède comme avec les lois γ . Enfin, pour le calcul, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^r) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{r+\alpha-1} e^{-\beta t} dt \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\beta}\right)^{r+\alpha-1} e^{-u} \frac{1}{\beta} du \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^{r+\alpha}} \int_0^{+\infty} u^{r+\alpha-1} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{\beta^r} \mathbb{E}(Y^r) \quad (\text{où } Y \hookrightarrow \gamma(\alpha)) \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1)}{\beta^r} \end{aligned}$$

- En particulier, $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$ (cas $r = 1$) et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$ (cas $r = 2$).
Ainsi, par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

III.3. Stabilité par somme des lois Gamma**Théorème 6.**

Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit X_1 une v.a.r. telle que $X_1 \hookrightarrow \Gamma(\alpha_1, \beta)$.

Soit X_2 une v.a.r. telle que $X_2 \hookrightarrow \Gamma(\alpha_2, \beta)$.

On suppose de plus que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

Remarque

La démonstration est similaire à celle du cas de la loi γ .

IV. Loi d'Erlang**IV.1. Densité****Définition**

On dit qu'une v.a.r. X suit la **loi d'Erlang** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$ si :

a) $X(\Omega) =]0, +\infty[$

b) Lav.a.r. X admet pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases} \end{cases}$$

Lien avec les précédentes lois

- Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$. La loi d'Erlang de paramètres n et λ n'est donc rien d'autre que la loi $\Gamma(n, \lambda)$ où n est un entier naturel.
- La loi d'Erlang étant une loi Gamma pour des paramètres particuliers, tous les résultats sur la loi d'Erlang se déduisent de l'étude réalisée sur la loi Gamma.

IV.2. Espérance et variance**Théorème 7.**

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$).

Alors, on a :

1) X admet une espérance.

1) X admet une variance.

2) $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{\lambda}$

2) $\mathbb{V}(X) = \frac{n}{\lambda^2}$

IV.3. Stabilité par somme des lois d'Erlang

Théorème 8.

Soient $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit X_1 une v.a.r. telle que $X_1 \hookrightarrow \Gamma(n_1, \lambda)$.

Soit X_2 une v.a.r. telle que $X_2 \hookrightarrow \Gamma(n_2, \lambda)$.

On suppose de plus que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(n_1 + n_2, \lambda)$.

Théorème 9.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :

× indépendantes,

× de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors $S_n \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$.

Démonstration.

L'étude de la loi Gamma étant faite, il suffit de rappeler : $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$.

Ainsi, par la stabilité par somme des lois Gamma, on obtient, par une récurrence immédiate :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda) \quad \square$$

Loi d'Erlang et concours

Il est relativement fréquent de faire l'étude de la loi d'Erlang dans les énoncés du TOP 3. Plus précisément :

- × ESSEC-III 2007 : la loi d'Erlang $\Gamma(n, \lambda)$ apparaît comme somme de n v.a.r. indépendantes de lois $\mathcal{E}(\lambda)$.
- × ESSEC-II 2010 : on considère une v.a.r. T qui représente la durée de vie d'un système. On appelle fiabilité la fonction de survie de T . On démontre des résultats généraux sur la fiabilité qu'on illustre sur plusieurs lois différentes pour T : loi $\mathcal{E}(\mu)$, loi d'Erlang $\Gamma(n, \beta)$ et loi de Weibull.
- × HEC 2012 : on considère initialement une v.a.r. qui suit une loi de Weibull. On démontre alors que $\lambda \sqrt{X}$ suit la loi $\mathcal{E}(1)$. La loi d'Erlang $\Gamma(n, 1)$ apparaît alors comme somme de n v.a.r. indépendantes de lois $\mathcal{E}(1)$.
- × HEC 2014 : sans citer explicitement la loi d'Erlang, on note J_n la fonction de répartition de la loi d'Erlang $\Gamma(n+1, 1)$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ une somme de v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{P}(1)$ (ainsi, $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$). On démontre alors : $\mathbb{P}([S_n \leq n]) = 1 - J_n(n)$ et $\mathbb{P}([S_n \geq n]) = J_{n-1}(n)$.