

# CH I : Suites réelles - révisions, compléments

## I. Notion de suite

### I.1. Définition générale

#### Définition

Une **suite** de nombre réels  $u$  est une **application** de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  c'est-à-dire une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{array}{l} u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{array}$$

#### Notation

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on utilisera la notation  $u_n$  pour représenter  $u(n)$ , l'image de l'application  $u$  au point  $n$ .
- L'application  $u$  sera généralement notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou tout simplement  $(u_n)$ .
- On pourra parler sans distinction de suite  $(u_n)$  ou de suite **de terme général**  $u_n$  (sans introduction préalable de la variable  $n$ ) ou enfin de suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dots$



Il faut faire la différence entre les objets :

- ×  $(u_n)$ , qui est une suite (infinité de termes).
- ×  $u_n$ , qui est la valeur de la suite au rang  $n$  (1 seul terme).

#### Remarque

On pourra aussi considérer des suites :

- × définies seulement à partir du rang 1

$$\begin{array}{ll} u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} & v : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto \frac{1}{n} & n \mapsto \ln(n) \end{array}$$

- × définies seulement à partir du rang 2 :  $(\ln(n-1))_{n \geq 2}$

- × définies seulement à partir du rang  $m$  (pour  $m \in \mathbb{N}$ ) :  $\left(\frac{1}{n-(m-1)}\right)_{n \geq m}$

### I.2. Comment définir une suite ?

- a) **De manière explicite** :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n + 3$ .

- b) **De manière implicite**

- (i) Par relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

(cette suite est arithmétique)

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 7u_n \end{cases}$$

(cette suite est géométrique)

$$\begin{cases} u_0 = -\sqrt{2} \\ u_1 = 2 \ln(3) \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

(cette suite est récurrente linéaire d'ordre 2)

- (ii) En définissant chacun de ses termes comme solution d'une équation :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $u_n$  l'unique solution positive de l'équation  $f_n(x) = 0$  où  $f_n$  est la fonction définie par ...

### I.3. Propriétés - vocabulaire

#### I.3.a) Sens de variation

Une suite  $(u_n)$  est croissante si elle définit une fonction croissante.

$$(u_n) \text{ croissante} \Leftrightarrow (\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n))$$

On utilise en fait la définition suivante (équivalente!) qui tire partie des propriétés de  $\mathbb{N}$ .

**Définition** (*Sens de variation des suites*)

- Une suite  $(u_n)$  est dite **croissante** si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite  $(u_n)$  est dite **décroissante** si :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- Dans le cas où ces inégalités sont strictes, on parlera de **croissance stricte** et de **décroissance stricte**.
- Une suite  $(u_n)$  est dite (strictement) **monotone** si :
  - × elle est (strictement) **croissante**,
  - OU × elle est (strictement) **décroissante**,
- Une suite à la fois croissante et décroissante est **constante**.
  - $(u_n)$  constante  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$
  - $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$
  - $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$
- Une suite est dite **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.
  - $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0})$
- De manière générale, on dit qu'une propriété  $\mathcal{P}(\cdot)$  est vérifiée à partir d'un certain rang si :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \mathcal{P}(n))$

#### Exercice

Montrer que ces deux notions de croissance sont équivalentes.

#### MÉTHODO

#### Étude du sens de variation d'une suite

Pour montrer qu'une suite est croissante, il faut démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$$

La rédaction attendue sur une telle question est la suivante.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} - u_n &= \dots \\ &= \dots \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

- Lorsque le terme général de la suite se présente sous forme d'un quotient / d'un produit, on peut considérer le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et le comparer à 1.

Attention cependant à cette écriture :

× il faut vérifier au préalable :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ .

× pour  $n \in \mathbb{N}$ , il faut aussi avoir en tête :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \not\Rightarrow \quad u_{n+1} \geq u_n$$

Ceci n'est vrai que si  $u_n > 0$ !

#### Exercice

Déterminer le sens de variation des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$a) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$b) \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}$$

### I.3.b) Bornes d'une suite réelle

**Définition** (Notion de majorant, minorant)

- Une suite  $(u_n)$  est dite **majorée** si elle admet un majorant.

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

- Une suite  $(u_n)$  est dite **minorée** si elle admet un minorant.

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

- Une suite à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

$$(u_n) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

**Remarque**

- Un majorant d'une suite  $(u_n)$  est un réel indépendant de la valeur de  $n$ . Par exemple, si une suite  $(u_n)$  vérifie :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n^2$ , **on ne peut pas** en conclure que  $(u_n)$  est majorée.  
(par exemple, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n^2$  mais la suite  $(n)$  n'est pas majorée)
- Si une suite  $(u_n)$  admet un majorant  $M$ , tout réel  $R \geq M$  est aussi majorant de la suite puisqu'on a alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M \leq R$ .  
Ainsi, si la suite  $(u_n)$  admet un majorant, elle en admet une infinité.

**Exemple**

Considérons la suite  $\left(2 - \frac{1}{n}\right)$  (suite de terme général  $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ ).

- Elle est majorée par 2 puisque :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ .
- Elle est donc majorée par : 2, 2.1, e, 3,  $\frac{7}{2}$ ,  $\sqrt{37}$  ...
- Parmi ces majorants, il convient de distinguer « le meilleur » c'est-à-dire celui qui apporte le plus d'informations sur la suite.  
Il s'agit ici de 2, le plus petit des majorants de la suite.

**Définition** (Notion de borne supérieure, inférieure)

- Toute suite réelle  $(u_n)$  majorée admet une **borne supérieure** : par définition, c'est le plus petit des majorants de la suite.

On notera  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  la borne supérieure de  $(u_n)$ .

- Toute suite réelle  $(u_n)$  minorée admet une **borne inférieure** : par définition, c'est le plus grand des minorants de la suite.

On notera  $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$  la borne inférieure de  $(u_n)$ .

**Remarque**

- Par définition, la borne supérieure de  $(u_n)$  (si elle existe !) est un majorant de  $(u_n)$ . On est donc dans l'un des deux cas suivants :  
× soit  $(u_n)$  est majorée et, dans ce cas, elle admet une borne supérieure,  
× soit  $(u_n)$  n'est pas majorée et, dans ce cas, elle n'admet pas de borne supérieure.
- Il est à noter que la borne supérieure de  $(u_n)$  (si elle existe !) n'est pas forcément un élément de la suite.  
Par exemple, la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = 2 - \frac{1}{n}$  admet pour borne supérieure  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = 2$ . Et 2 n'est jamais atteint ( $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 2$ ).
- Si le « meilleur » des majorants est atteint, on parle de maximum.

**Définition** (Notion de maximum, minimum)

- On dira qu'une suite  $(u_n)$  admet un **maximum** atteint au rang  $n_0$  si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n_0}$$

Un maximum atteint au rang  $n_0$  sera noté :  $u_{n_0} = \max_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

- On dira qu'une suite  $(u_n)$  admet un **minimum** atteint au rang  $n_0$  si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n_0}$$

Un minimum atteint au rang  $n_0$  sera noté :  $u_{n_0} = \min_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

**Remarque**

- Les notions de maximum et de borne supérieure sont différentes.
  - 1) Si une suite admet un maximum, alors elle admet aussi une borne supérieure qui est égale à ce maximum.  
Ainsi, si une suite n'admet pas de borne supérieure, elle n'admet pas non plus de maximum. (*c'est la contraposée du point précédent*)
  - 2) Une suite peut admettre une borne supérieure mais pas de maximum. Autrement dit, la borne supérieure d'une suite n'est pas forcément atteinte (*i.e.* n'est pas forcément un élément de la suite).  
(*considérer par exemple la suite  $(2 - \frac{1}{n})$* )
- Les notions de borne supérieure et inférieure ne sont pas officiellement au programme de ECE. Elles sont développées ici dans le but de permettre une meilleure compréhension de la notion de majorants.

**Propriété** (*Caractérisation des suites bornées*)

$$(u_n) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Autrement dit :  $(u_n)$  est bornée **ssi** la suite  $(|u_n|)$  possède un majorant.

*Démonstration.*

On procède par double implication.

( $\Rightarrow$ ) Si  $(u_n)$  est bornée, il existe  $m_1$  et  $M_1$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, m_1 \leq u_n \leq M_1$ .  
Notons  $M = \max(|m_1|, |M_1|)$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

( $\Leftarrow$ ) Il suffit de remarquer que (propriété de la fonction valeur absolue) :

$$|u_n| \leq M \Leftrightarrow -M \leq u_n \leq M$$

□

**I.3.c) Suites extraites****Définition**

Soit  $(u_n)$  une suite.

Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante.

- La suite  $(u_{\varphi(n)})$  est une **sous-suite** (ou **suite extraite**) de  $(u_n)$ .

**Exemple**

Considérons la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ .

- Si on note  $v_n = u_{2n}$ , alors  $(v_n)$  est une suite extraite de  $(u_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(-1)^{2n}}{(2n)+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

- Si on note  $w_n = u_{2n+1}$ , alors  $(w_n)$  est une suite extraite de  $(u_n)$  définie

$$\text{par : } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)+1} = \frac{-1}{2n+2}.$$

- La suite  $(u_{n-3})_{n \geq 3}$  est aussi une suite extraite de  $(u_n)$ .
- La suite  $(u_{\ln(n)})_{n \geq 1}$  n'est pas une suite extraite de  $(u_n)$ .

**Exercice**

On considère la suite  $(S_n)$  de terme général :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

- a.** Montrer que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont des suites extraites de la suite  $(S_n)$ .

Il suffit de remarquer que  $\varphi : n \mapsto 2n$  et  $\psi : n \mapsto 2n+1$  sont des fonctions :

- × de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ ,
- × strictement croissantes.

- b.** Déterminer le sens de variation des suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$ .

Notons  $(v_n)$  la suite de terme général  $v_n = S_{2n}$ .

Alors :  $v_{n+1} - v_n = S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \dots$

(*on agit de même pour  $(S_{2n+1}) \dots$* )

## II. Suites usuelles

### II.1. Suites arithmétiques

#### Définition

Une suite  $(u_n)$  est dite **arithmétique** s'il existe un réel  $r$  (appelé raison) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

**Théorème 1.** (*Caractérisation des suites arithmétiques*)

$$(u_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times r$$

### II.2. Suites géométriques

#### Définition

Une suite  $(u_n)$  est dite **géométrique** s'il existe un réel  $q$  (appelé raison) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

**Théorème 2.** (*Caractérisation des suites géométriques*)

$$(u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

#### Exemple

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  suivantes.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 5 \times v_n \end{cases}$$

- La suite  $(u_n)$  a pour formule explicite :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n + 3$ .
- La suite  $(v_n)$  a pour formule explicite :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3 \times 5^n$ .

### II.3. Suites arithmético-géométriques

#### II.3.a) Définition

##### Définition

- Une suite  $(u_n)$  est dite **arithmético-géométrique** s'il existe  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  et un réel  $b \neq 0$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$

- On appelle **équation de point fixe** associée à la suite  $(u_n)$  l'équation (en la variable  $x$ ) suivante :  $x = a \times x + b$

(si on note  $f : x \mapsto a \times x + b$ , cette équation se réécrit :  $f(x) = x$ , faisant ainsi de l'élément  $x \in \mathbb{R}$  un **point fixe** de  $f$ )

#### II.3.b) Méthode d'étude

Considérons une suite arithmético-géométrique  $(u_n)$ .

On va ramener l'étude de ce type de suites à l'étude des suites géométriques.

##### 1) Résolution de l'équation de point fixe $x = a \times x + b$

Cette équation admet pour unique solution  $\lambda = \frac{b}{1-a}$ .

##### 2) Utilisation d'une suite auxiliaire $(v_n)$ (géométrique)

$$\text{On écrit : } u_{n+1} = a \times u_n + b \quad (L_1)$$

$$\lambda = a \times \lambda + b \quad (L_2)$$

$$\text{et donc } u_{n+1} - \lambda = a \times (u_n - \lambda) \quad (L_1) - (L_2)$$

Notons alors  $(v_n)$  la suite de terme général  $v_n = u_n - \lambda$ .

De par l'égalité précédente, on a :  $v_{n+1} = a \times v_n$ .

##### 3) Obtention de la formule explicite pour $(v_n)$

La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $a$ . Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a^n \times v_0$ .

4) Conclusion : obtention de la formule explicite pour  $(u_n)$

On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n - \lambda = a^n \times (u_0 - \lambda)$

On obtient donc une formule explicite pour  $(u_n)$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n \times (u_0 - \lambda) + \lambda$$

### Remarque

- Le principe de la démonstration est de faire apparaître  $u_n$  comme somme d'une partie géométrique ( $v_n$ ) et d'un élément ( $\lambda$ ) :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \lambda$ .
- Les suites arithmético-géométriques apparaissent ainsi comme des suites géométriques translatées de  $\lambda$ .
- On note que la partie géométrique dans la définition de  $(u_n)$  ( $u_{n+1} = a \times u_n + \dots$ ) se retrouve dans la formule explicite ( $u_n = a^n \times (u_0 - \lambda) + \dots$ ).

### Exercice

Notons  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 \times u_n + 2 \end{cases}$$

Donner une formule explicite de  $(u_n)$  puis calculer  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

1) L'équation de point fixe associée à la suite  $(u_n)$  est :

$$x = 3 \times x + 2$$

Or :  $x = 3 \times x + 2 \Leftrightarrow 2 \times x = -2$ .

Cette équation a donc pour unique solution :  $\lambda = -1$ .

2) On écrit alors :

$$u_{n+1} = 3 \times u_n + 2 \quad (L_1)$$

$$\lambda = 3 \times \lambda + 2 \quad (L_2)$$

$$\text{et donc } u_{n+1} - \lambda = 3 \times (u_n - \lambda) \quad (L_1) - (L_2)$$

Notons alors  $(v_n)$  la suite de terme général  $v_n = u_n - \lambda$ .

3) D'après le point 2), la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 3.

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = v_0 \times 3^n = (u_0 - \lambda) 3^n = (0 - (-1)) 3^n = 3^n$$

4) Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = v_n + \lambda = 3^n - 1$ .

On peut alors déterminer  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (3^k - 1) \\ &= \sum_{k=0}^n 3^k - \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - (n + 1) \\ &= \frac{1}{2} (3^{n+1} - 1) - n - 1 \\ &= \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - n - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

## II.4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

### II.4.a) Définition

#### Définition

- Une suite  $(u_n)$  est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels (non nuls)  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n$$

- On appelle **équation caractéristique** associée à la suite  $(u_n)$  l'équation (en la variable  $x$ )  $x^2 = ax + b$ . On peut la réécrire :

$$x^2 - ax - b = 0$$

### II.4.b) Méthode d'étude

Cette méthode est basée sur le calcul des racines de l'équation caractéristique. On a ainsi trois cas différents, en fonction du discriminant  $\Delta$  du polynôme caractéristique.

#### Théorème 3.

Soit  $(u_n)$  une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Il existe donc  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ .

1) Si  $\Delta = a^2 + 4b > 0$

Alors le polynôme admet deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ .

La formule explicite de  $(u_n)$  est donnée par :

$$u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n$$

où les réels  $\lambda$  et  $\mu$  sont donnés par

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda \times r_1 + \mu \times r_2 = u_1 \end{cases}$$

2) Si  $\Delta = a^2 + 4b = 0$

Alors le polynôme admet une racine double  $r$ .

La formule explicite de  $(u_n)$  est donnée par :

$$u_n = \lambda \times r^n + \mu \times n \times r^n$$

où les réels  $\lambda$  et  $\mu$  sont donnés par

$$\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda r + \mu \times r = u_1 \end{cases}$$

3) Si  $\Delta = a^2 + 4b < 0$

Alors le polynôme n'admet pas de racine réelle.

Une formule explicite pour la suite  $(u_n)$  existe bien mais ne sera pas donnée ici (Hors Programme).

*Démonstration.*

Hors programme et donc non développée ici. □

#### Exercice

On considère la suite donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$$

Donner une formule explicite de cette suite.

- L'équation caractéristique associée à la suite  $(u_n)$  est :  $x^2 = -2x + 3$ .  
Notons  $P$  le polynôme :  $P(X) = X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$ .  
(Le polynôme  $P$  admet pour racine évidente  $r_1 = 1$ .  
On en déduit la deuxième racine de  $P$  :  $r_2 = -3$ .)
- On en déduit la formule explicite de  $(u_n)$  :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n \\ &= \lambda \times (1)^n + \mu \times (-3)^n \\ &= \lambda + \mu \times (-3)^n \end{aligned}$$

où les valeurs  $\lambda$  et  $\mu$  sont données par le système :

$$(S) \begin{cases} 2 = \lambda + \mu & (\text{valeur en } n = 0) \\ 0 = \lambda - 3\mu & (\text{valeur en } n = 1) \end{cases}$$

Résolvons-le.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = & 4\mu & (L_1) - (L_2) \\ 6 = 4\lambda & & 3 \times (L_1) + (L_2) \end{cases}$$

- Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (-3)^n$$

### III. Notions de convergence, divergence

#### III.1. Suites réelles convergentes

**Définition** *Suites réelles convergentes*

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$  un nombre réel (fini).

- On dit que la suite  $(u_n)$  **converge vers**  $\ell$  (ou admet la limite  $\ell$  / ou tend vers  $\ell$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ) si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  sauf un nombre fini d'entre eux.  
(c'est la définition donnée par le programme officiel)

- Cette propriété peut s'écrire à l'aide de quantificateurs.

La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

ou encore (avec l'abus de notation «  $\forall n \geq n_0$  ») :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

- Cette propriété signifie :

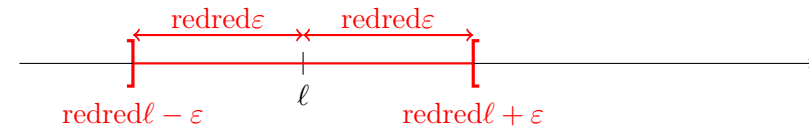
« quelle que soit la précision  $\varepsilon$  ( $> 0$ ) choisie, on peut trouver un rang à partir duquel les éléments de la suite ne s'écartent pas de  $\ell$  de plus de  $\varepsilon$  »

- Lorsque  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou encore} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

#### Représentation graphique

Si la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , on peut trouver un rang à partir duquel tous ses termes sont dans l'intervalle rouge (et ce quel que soit la largeur fixée auparavant de cet intervalle) :





### III.2. Suites réelles divergentes

**Définition** *Suites réelles divergentes*

- Une suite réelle  $(u_n)$  est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.
- Autrement dit,  $(u_n)$  est divergente s'il n'existe pas d'éléments  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

### III.3. Cas des limites infinies

**Définition** *Suite divergeant vers l'infini*

Soit  $(u_n)$  une suite de réels.

- On dit que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  si :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A)$$

Ce que l'on peut écrire, avec l'abus de notation habituel :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A$$

Ceci signifie que les termes de la suite deviennent, à partir d'un certain rang, aussi grands que souhaités.

- Lorsque  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , on utilise les notations suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

ou encore

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

- On dit que la suite  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$  si :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n < -A)$$

Ce que l'on peut écrire, avec l'abus de notation habituel :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < -A$$

### Remarque

- Une suite  $(u_n)$  qui tend vers  $+\infty$  est une suite **divergente**. La notion de convergence est réservée aux suites admettant une limite **finie**.
- Il n'est pas nécessaire, dans la définition de suite divergente, de supposer  $A > 0$ . Plus précisément, on a :

$$u_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A$$

$$u_n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < A$$

- Qu'elle soit finie ou non, il y a unicité de la limite.

**Théorème 4.** *Propriété d'unicité de la limite*

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ u_n \rightarrow \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{array} \right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

### III.4. Quelques propriétés issues des définitions

**Propriété** *des suites convergentes*

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

$$1) \quad (u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (u_n - \ell) \text{ converge vers } 0$$

$$2) \quad (u_n) \text{ converge vers } 0 \Leftrightarrow (|u_n|) \text{ converge vers } 0$$

$$3) \quad (u_n) \text{ convergente} \Rightarrow (u_n) \text{ bornée}$$

4) Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante.

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

Ainsi, si  $(u_n)$  est convergente de limite  $\ell$ , alors il en est de même de toutes ses suites extraites.

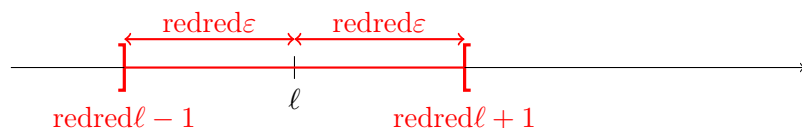
*Démonstration.*

On ne démontre ici que la propriété **3**). On pourra se reporter au [cours de première année](#) pour les autres démonstrations.

**3)** Soit  $(u_n)$  une suite convergente de limite  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Choisissons une précision  $\varepsilon = 1$ .

Par définition de la convergence, on sait qu'à partir d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N} : |u_n - \ell| < 1$ . Autrement dit :  $\forall n \geq n_0, \ell - 1 < u_n < \ell + 1$ .



La suite  $(u_n)$  est donc bornée à partir d'un certain rang ( $n_0$  en l'occurrence). Il reste à montrer qu'elle est bornée tout court.

Pour ce faire, considérons les éléments de la suite précédant le rang  $n_0$  :

$$u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}$$

Ces éléments sont en nombre fini et possèdent donc :

× un minimum :  $a = \min\{u_n \mid n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket\}$ ,

× un maximum  $A = \max\{u_n \mid n \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket\}$ .

Si on note  $m = \min(a, \ell - 1)$  et  $M = \max(A, \ell + 1)$ , on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

### Remarque

- Ce résultat n'est pas une équivalence. Une suite bornée n'est pas forcément convergente. (considérer par exemple la suite  $((-1)^n)$ )

On obtient, par contraposée, qu'une suite non bornée ne peut converger.

- La propriété **4**) fournit un critère de divergence :

× si  $(u_n)$  admet une sous-suite divergente, alors  $(u_n)$  diverge.

× si  $(u_n)$  admet deux sous-suites tendant vers deux limites distinctes, alors  $(u_n)$  diverge.

En particulier, on peut en déduire que la suite  $((-1)^n)$  est divergente.

### Exercice (propriété de recouvrement)

Soit  $(u_n)$  une suite telle que :

×  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, de limite  $\ell \in \mathbb{R}$ ,

×  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, de limite  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Montrer que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

*Démonstration.*

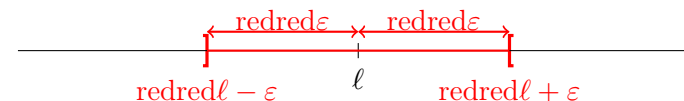
### Démonstration formelle « avec les $\varepsilon$ »

Soit  $\varepsilon > 0$ .

- On sait :  $u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

Ainsi, il existe un rang  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_1, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon$ .

(ceci signifie qu'à partir du rang  $n_1$ , tous les éléments de  $(u_{2n})$  sont dans l'intervalle rouge)



- On sait :  $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

Ainsi, il existe un rang  $n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2, |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$ .

(ceci signifie qu'à partir du rang  $n_2$ , tous les éléments de  $(u_{2n+1})$  sont dans l'intervalle rouge)

Noton  $N = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$ . Ces deux inégalités permettent d'affirmer :

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

(ceci signifie qu'à partir du rang  $N$ , tous les éléments de  $(u_n)$  sont dans l'intervalle rouge)

Ainsi  $(u_n)$  est convergente de limite  $\ell$ .



Le programme officiel précise « [qu'] aucune démonstration concernant les résultats [du chapitre convergence] n'est exigible ».

- Ce type de démonstration, dite « avec les  $\varepsilon$  », est de ce fait considéré comme très technique.
- Dans une copie de concours, on attend plutôt un raisonnement comme celui qui suit.

### Démonstration formelle « sans les $\varepsilon$ »

Soit  $I$  un intervalle ouvert contenant  $\ell$ .

- Comme  $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ , l'intervalle  $I$  contient tous les termes de la suite  $(u_{2n})$  (c'est-à-dire tous les termes d'indices pairs de la suite  $(u_n)$ ) sauf un nombre fini d'entre eux.
- Comme  $u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ , l'intervalle  $I$  contient tous les termes de la suite  $(u_{2n+1})$  (c'est-à-dire tous les termes d'indices impairs de la suite  $(u_n)$ ) sauf un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle  $I$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  sauf un nombre fini d'entre eux.  $\square$

### Remarque

- La propriété 4) ( $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ ) et la propriété de recouvrement (que l'on peut voir comme une sorte de réciproque) restent vraies pour des limites infinies. La démonstration est similaire.
- Ce résultat n'est pas dans le programme officiel de la voie ECE. Il faut savoir le démontrer si on souhaite l'utiliser. On ne pourra donc pas, dans une copie, rédiger en évoquant « par la propriété de recouvrement ».

### Propriété des suites divergeant vers l'infini

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

- 1)  $(u_n \rightarrow -\infty) \Leftrightarrow (-u_n \rightarrow +\infty)$
- 2) Si  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  alors elle n'est pas majorée. (réciproque fausse ! Considérer  $((-1)^n n)$ )
- 3) Si  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  (réciproquement  $-\infty$ ) alors elle est positive (réciproquement négative) à partir d'un certain rang.

$$u_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq 0$$

$$u_n \rightarrow -\infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq 0$$

## IV. Compatibilité avec la relation d'ordre

### IV.1. Démontrer des inégalités pour les suites convergentes

**Théorème 5.** (« Passage à la limite » dans les inégalités)

Soit  $(u_n)$  une suite convergente, de limite  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

- a) S'il existe un rang  $n_0$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_n \geq a$  alors :  $\ell \geq a$ .
- b) S'il existe un rang  $n_0$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_n \leq b$  alors :  $\ell \leq b$ .
- c) S'il existe un rang  $n_0$  tel que :  $\forall n \geq n_0, a \leq u_n \leq b$  alors :  $a \leq \ell \leq b$ .

On peut résumer ces propriétés comme suit.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell \\ \forall n \geq n_0, u_n \geq a \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \geq a \quad \left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell \\ \forall n \geq n_0, u_n \leq b \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \leq b$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell \\ \forall n \geq n_0, a \leq u_n \leq b \end{array} \right\} \Rightarrow a \leq \ell \leq b$$

**Remarque**

- On parle parfois de « passage à la limite » dans les inégalités. On rappelle que ce passage n'est possible que si on a démontré au préalable que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- En particulier, il ne faut pas confondre ce résultat avec le théorème d'encadrement présenté plus loin.
- Il est facile d'écrire un énoncé similaire avec des inégalités strictes. En effet, comme :  $u_n > a \Rightarrow u_n \geq a$  (inégalité stricte implique large) :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell \\ \forall n \geq n_0, u_n > a \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \geq a \quad \left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell \\ \forall n \geq n_0, u_n < b \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \leq b$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell \\ \forall n \geq n_0, a < u_n < b \end{array} \right\} \Rightarrow a \leq \ell \leq b$$

- Par exemple, par passage à la limite, on obtient le résultat suivant :

$$\left( \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0 \right) \Rightarrow 0 \geq 0$$

- Si l'on sait que la suite  $(u_n)$  est convergente de limite  $\ell \in \mathbb{R}$ , le résultat peut se résumer comme suit :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I) \Rightarrow \ell \in \bar{I}$$

où  $I$  est un intervalle et  $\bar{I}$  est l'adhérence de  $I$  (intervalle  $I$  auquel on a ajouté ses bornes finies). Par exemple :

$$\times (\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]-3, 2[) \Rightarrow \ell \in [-3, 2]$$

$$\times (\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]0, 2]) \Rightarrow \ell \in [0, 2]$$

$$\times (\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]0, +\infty[) \Rightarrow \ell \in [0, +\infty[$$

**Théorème 6.** (Théorème de comparaison des limites)

Soit  $(u_n)$  une suite convergente, de limite  $\ell_1 \in \mathbb{R}$ .

Soit  $(v_n)$  une suite convergente, de limite  $\ell_2 \in \mathbb{R}$ .

Supposons de plus :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ .

On a alors :  $\ell_1 \leq \ell_2$ .

On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell_1 \\ v_n \rightarrow \ell_2 \\ \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \ell_1 \leq \ell_2 \quad \left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell_1 \\ v_n \rightarrow \ell_2 \\ \forall n \geq n_0, u_n > v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \ell_1 \geq \ell_2$$

(la remarque sur les inégalités strictes s'applique ici aussi)

Démonstration.

On applique le Théorème 5 à la suite de terme général :  $w_n = u_n - v_n$ .  $\square$

**Remarque**

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  étant convergentes, on peut encore parler de « passage à la limite » dans les inégalités.

**Exercice**

a. Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Cette propriété est-elle vraie pour  $n = 0$  ?

Démontrons par récurrence, :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

1) **Initialisation** :

- D'une part :  $1! = 1$ .

- D'autre part :  $2^{1-1} = 2^0 = 1$ .

D'où :  $\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^{1-1}}$  et  $\mathcal{P}(1)$  est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit  $n \geq 1$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par hypothèse de récurrence :  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

On en déduit :  $\frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$

En effet :  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$  car  $n+1 \geq 2$ . Ainsi  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par principe de récurrence, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ .

Enfin, la propriété est vraie pour  $n=1$  puisque  $1! = 1$  et  $2^{1-1} = 2^0 = 1$ .

b. Démontrer que la suite de terme général  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  converge vers un réel  $S \in ]2, 3]$ .

• Soit  $n \geq 0$ .  $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$ .

Ainsi, la suite  $(S_n)$  est croissante.

• D'après la question précédente, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ .

On en déduit par sommation :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Et ainsi,  $S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$ .

• La suite  $(S_n)$  est croissante et majorée par 3 donc convergente vers un réel  $S$  tel que  $S \leq 3$ .

• Enfin, si  $n \geq 3$  :  $S_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k!} = \frac{5}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k!} > \frac{5}{2}$ .

On en déduit, par passage à la limite, :  $S \geq \frac{5}{2} > 2$ .

### IV.2. Démontrer de la convergence

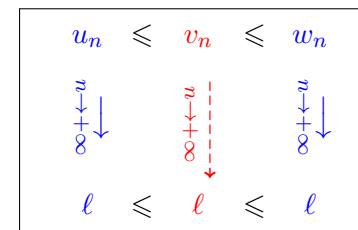
**Théorème 7.** (Théorème d'encadrement)

Soient  $(u_n), (v_n), (w_n)$  trois suites réelles telles que :

- $(u_n)$  est convergente, de limite  $\ell$ .
- $(w_n)$  est convergente, de même limite  $\ell$ .
- Il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$ .

Alors la suite  $(v_n)$  est convergente de limite  $\ell$ .

On peut résumer ce théorème comme suit.



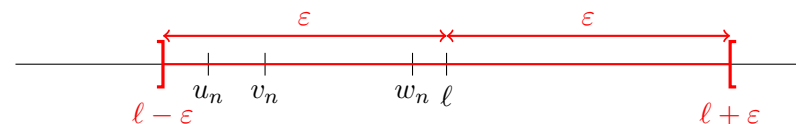
*Démonstration.*

Considérons un intervalle ouvert contenant  $\ell$ .

- Tous les termes de  $(u_n)$  (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.
- Tous les termes de  $(w_n)$  (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.
- Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .

On en conclut que tous les termes de  $(v_n)$  (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.

On peut rédiger cette démonstration « avec les  $\epsilon$  » en s'appuyant sur la représentation graphique ci-dessous :



□

**Remarque**

- Dans cet énoncé, on ne suppose pas  $(v_n)$  convergente mais on le **démontre**.
- Ainsi, rédiger en argumentant par « un passage à la limite » serait une erreur logique (et donc sanctionnée comme telle). On ne peut « passer à la limite » que si l'on sait que la suite est convergente.
- Ce théorème est aussi appelé « théorème des gendarmes ».

L'idée est la suivante : deux gendarmes viennent d'attraper un voleur et l'encadrent en lui saisissant chacun un bras. Les gendarmes convergent (c'est-à-dire se dirigent) vers le poste de police. Ainsi encadré, le voleur n'a d'autre choix que se diriger lui aussi vers le poste de police.

Dans une copie de concours, on préférera la terminologie « théorème d'encadrement ».

**Exercice** (appliquer le théorème d'encadrement)

a) Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ .

- Rappelons que pour  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$ , on a :  $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ . D'où :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{2n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{2}{2n} + \frac{1}{4n^2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{4n^2}$$

Ainsi, l'inégalité de droite est vérifiée.

- De même, on a :  $1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2 - \frac{2}{n^2} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{n^4} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} - \frac{7}{4n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \leq 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n^4} \leq \frac{7}{4n^2} + \frac{1}{n^3}$$

Enfin, on a :  $\frac{1}{n^4} \leq \frac{7}{4n^2} + \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{7}{4}n^2 + n$ .

Cette dernière égalité est vérifiée car  $n \geq 1$ .

Ainsi, l'inégalité initiale est aussi vérifiée.

b) En déduire un équivalent simple de  $\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ .

En divisant par  $1 + \frac{1}{2n} (> 0)$  de part et d'autre de l'inégalité **a**), on obtient :

$$\frac{1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{2n}} \leq \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{2n}} \leq \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}}$$

Ainsi :  $1 - \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{2n}} \leq \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{2n}} \leq 1$ . Or :

$$\times 1 - \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{2n}} = 1 - \frac{1}{n^2 + \frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

$$\times 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite  $\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{2n}}\right)$

est convergente, de limite 1. Ainsi :  $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{2n}$ .

c) Déduire de **a**) la limite de la suite  $\left(\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n\right)$ .

En multipliant l'inégalité **a**) par  $n (> 0)$ , on obtient :

$$n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq n + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n \leq \frac{1}{2}$$

On remarque alors :

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}, \\ & \times \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite  $\left(\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{n}\right)$  est convergente, de limite  $\frac{1}{2}$ .

### IV.3. Démontrer de la divergence vers l'infini

#### Théorème 8.

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  et soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que :

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$$

a) Si  $u_n \rightarrow +\infty$ , alors  $v_n \rightarrow +\infty$ .

On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \\ u_n \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow v_n \rightarrow +\infty$$

b) Si  $v_n \rightarrow -\infty$ , alors  $u_n \rightarrow -\infty$ .

On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \\ v_n \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \rightarrow -\infty$$

## V. Les théorèmes de monotonie

### V.1. Théorème de convergence monotone

**Théorème 9.** (Croissance et majoration)

Soit  $M \in \mathbb{R}$ .

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ majorée par } M \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers une} \\ \text{limite finie } \ell \leq M$$

2)

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ non majorée} \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \rightarrow +\infty$$

Démonstration.

1) Supposons que la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $M$ .

- Tout d'abord, comme la suite  $(u_n)$  est majorée, elle possède une borne supérieure. Notons  $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

Il s'agit alors de démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et de limite  $\ell$ .

- Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $\ell$  est le meilleur des majorants,  $\ell - \varepsilon$  n'est pas un majorant de la suite  $(u_n)$ . On en déduit que la propriété :

$$\text{NON}(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell - \varepsilon)$$

est vérifiée ce qui signifie qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > \ell - \varepsilon$ .

La suite  $(u_n)$  étant croissante, on en déduit :

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > \ell - \varepsilon \quad (1)$$

- D'autre part,  $\ell$  étant un majorant de  $(u_n)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon \quad (2)$$

- Il n'y a plus qu'à regrouper les deux inégalités (1) et (2).  
On obtient que, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

ce qui signifie :  $-\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon$ .

En résumé :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

2) Supposons que  $(u_n)$  est croissante et non majorée.

- La suite  $(u_n)$  n'ayant pas de majorant, c'est que la propriété :

$$\text{NON}(\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M)$$

est vérifiée. Autrement dit :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > M \quad (3)$$

- Soit  $A > 0$ .  
On déduit de la propriété (3) qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $u_{n_0} > A$ .  
La suite  $(u_n)$  étant croissante, on en déduit :

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > A$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

### Remarque

- La démonstration du théorème de convergence monotone est hors programme en ECE. Elle est donnée ici simplement pour le plaisir du lecteur.
- On a mis en évidence lors de la démonstration que la suite  $(u_n)$  (croissante et majorée) convergeait vers sa borne supérieure. Cela semble assez naturel : la suite croît jusqu'à atteindre (seulement asymptotiquement parlant !) le plus petit de ses majorants.  
Ce plus petit des majorants étant lui-même un majorant, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$$

- La notion de borne supérieure / inférieure n'étant pas au programme de la voie ECE, il n'est donc pas évident que l'on puisse utiliser directement la propriété stipulant que la limite  $\ell \in \mathbb{R}$  (si elle existe !) d'une suite croissante, est un majorant de cette suite. Tout dépend de la manière dont l'énoncé est formulé. Généralement, cette propriété ne représente qu'une étape dans le raisonnement et on pourra donc l'utiliser sans démonstration. Évidemment, on procèdera à la démonstration si l'énoncé le demande explicitement.

### Propriété

Soit  $(u_n)$  une suite de réels. Alors on a :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ croissante} \\ u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$$

*Démonstration.*

- On procède par l'absurde. On suppose :

- × la suite  $(u_n)$  croissante,
- × la suite  $(u_n)$  convergente vers  $\ell$ ,
- × et que  $\text{NON}(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell)$  est vérifiée.

$\square$  Autrement dit, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > \ell$ .

- La suite  $(u_n)$  étant croissante, on a :

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient :  $\ell \geq u_{n_0}$ .

- En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors :  $\ell \geq u_{n_0} > \ell$ .

Ce qui est absurde !  $\square$



**Théorème 10.** (Décroissance et minoration)Soit  $m \in \mathbb{R}$ .

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ minorée par } m \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers une} \\ \text{limite finie } \ell \geq m$$

$$2) \quad \left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ non minorée} \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \rightarrow -\infty$$

Démonstration.

- 1) • Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite  $(v_n)$  de terme général  $v_n = -u_n$ . En effet :
- ×  $(u_n)$  décroissante  $\Leftrightarrow (-u_n)$  croissante,
  - ×  $(u_n)$  minorée  $\Leftrightarrow (-u_n)$  majorée.
- Ainsi, si l'on suppose  $(u_n)$  décroissante et minorée par  $m$ , on obtient que  $(v_n)$  est croissante et majorée par  $-m$  ( $u_n \geq m \Leftrightarrow -u_n \leq -m$ ).
- D'après le théorème précédent, la suite  $(v_n)$  est donc convergente vers une limite finie  $\ell_1$  telle que :  $\ell_1 \leq -m$ .
- Et donc  $(u_n)$  est convergente de limite  $\ell = -\ell_1$  et cette limite vérifie :

$$\ell = -\ell_1 \geq m$$

2) Pour procéder comme précédemment, il suffit de remarquer que comme :

$$(u_n) \text{ minorée} \Leftrightarrow (v_n) \text{ majorée}$$

on a :

$$\text{NON}((u_n) \text{ minorée}) \Leftrightarrow \text{NON}((v_n) \text{ majorée})$$

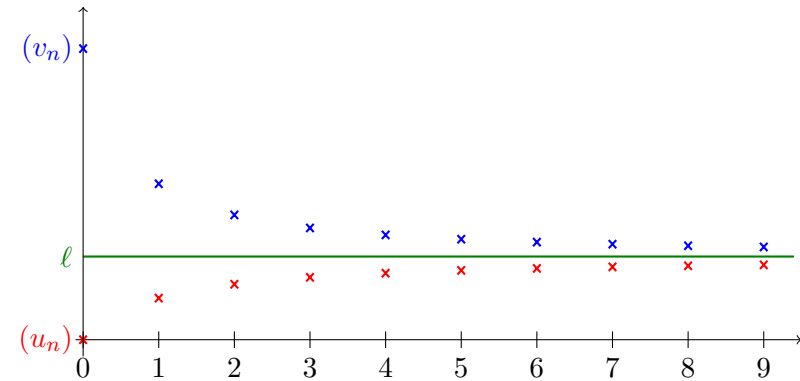
□



Ne pas confondre définition (l'une croissante, l'autre décroissante et l'écart tend vers 0) et le résultat (convergentes de même limite).

**V.2. Suites adjacentes****Définition**Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites **adjacentes** si :

- 1)  $(u_n)$  est croissante,
- 2)  $(v_n)$  est décroissante,
- 3)  $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Représentation graphique****Théorème 11.**

Si deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, alors elles sont convergentes et admettent la même limite.

$$\left. \begin{array}{l} 1) (u_n) \text{ est croissante,} \\ 2) (v_n) \text{ est décroissante,} \\ 3) u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont convergentes} \\ \text{et admettent la même limite}$$

*Démonstration.*

Il s'agit essentiellement de démontrer que la représentation graphique précédente est correcte.

**a) La suite  $(v_n - u_n)$  est décroissante**

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{\leq 0} + \underbrace{u_n - u_{n+1}}_{\leq 0} \leq 0.$$

**b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \geq u_n$**

Par hypothèse,  $(v_n - u_n)$  est convergente.

Par théorème, elle est donc bornée.

Cette suite étant décroissante et minorée, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} (v_n - u_n) = 0$$

(comme précisé dans la remarque suivant le théorème de convergence monotone, il faudrait faire cette démonstration par l'absurde)

**c) La suite  $(u_n)$  est majorée et la suite  $(v_n)$  est minorée**

On peut maintenant démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_0$ .

- En effet, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$  puisque  $(v_n)$  est décroissante.

- Ainsi, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq v_0$ .

De manière analogue, on démontre :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq v_n$ .

**d) Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite**

- $(u_n)$  est croissante et majorée (par  $v_0$ ) donc convergente vers  $\ell_1 \in \mathbb{R}$ .

- $(v_n)$  est décroissante et minorée (par  $u_0$ ) donc convergente vers  $\ell_2 \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Ainsi, on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell_1 - \ell_2.$$

(la première égalité est seulement vérifiée pour des suites convergentes)

Or par hypothèse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

On en conclut :  $\ell_1 = \ell_2$ . □

**Exercice**

On considère la suite  $(S_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ .

**a) Démontrer que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.**

**b) En déduire que la suite  $(S_n)$  converge.**

*Démonstration.*

**a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .**

- La suite  $(S_{2n})$  est croissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

- La suite  $(S_{2n-1})$  est décroissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)-1} - S_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \leq 0 \end{aligned}$$

- $S_{2n} - S_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi, les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n-1})$  sont adjacentes.

Elles sont donc convergentes vers la même limite  $\ell \in \mathbb{R}$ .

b) Soit  $I$  un intervalle ouvert contenant  $\ell$ .

- Comme  $S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , l'intervalle  $I$  contient tous les termes d'indices pairs de la suite  $(S_n)$  sauf un nombre fini d'entre eux.
- Comme  $S_{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , l'intervalle  $I$  contient tous les termes d'indices impairs de la suite  $(S_n)$  sauf un nombre fini d'entre eux.

Ainsi,  $I$  contient tous les termes de  $(S_n)$  sauf un nombre fini d'entre eux.

Ceci démontre que la suite  $(S_n)$  est convergente de limite  $\ell$ .  $\square$

### Prenons un peu de recul (CULTURE)

Cet exercice est une illustration d'un résultat (classique en maths sup) nommé le critère des séries alternées.

- Une série  $\sum u_n$  est dite alternée si  $(-1)^n u_n$  est de signe constant. C'est une manière formelle de dire que tous les termes d'indices pairs de la suite  $(u_n)$  sont positifs et que tous les termes d'indices impairs de la suite  $(u_n)$  sont négatifs. Ou l'inverse.

C'est bien le cas dans l'exercice où l'on considère la série  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . On remarque en effet :

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq 0 \quad \text{pour tout entier } n \text{ pair}$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq 0 \quad \text{pour tout entier } n \text{ impair}$$

- Le critère des séries alternées s'énonce comme suit.

$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ La série } \sum u_n \text{ est alternée} \\ 2) \forall n \in \mathbb{N},  u_{n+1}  \leq  u_n  \\ 3) u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La série } \sum u_n \text{ est convergente}$
---

La démonstration (qui consiste à démontrer que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes) est laissée au lecteur. Il ne s'agit que d'une généralisation de la démonstration faite dans l'exercice.

## VI. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse ici à des suites définies par des relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction.

L'étude de telles suites se fait généralement en commençant par l'étude des propriétés de la fonction  $f$  puis en en déduisant des propriétés de la suite  $(u_n)$ . On dresse ici un catalogue de ces propriétés.

Avant tout, commençons par donner un exemple d'une telle suite.

### VI.0. Un premier exemple

#### VI.0.a) Étude de fonction

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2}$ . Commençons par étudier la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

- La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  car elle est le quotient  $f = \frac{f_1}{f_2}$  où :
  - ×  $f_1 : x \mapsto x$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  car polynomiale.
  - ×  $f_2 : x \mapsto (x+1)^2$  est :
    - dérivable sur  $[0, +\infty[$  car polynomiale.
    - NE S'ANNULE PAS sur  $[0, +\infty[$ .

Soit  $x \in [0, +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(1+x)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) - 2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

Comme  $(x+1)^3 > 0$  (on rappelle qu'on a supposé  $x \geq 0$ ) le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1-x$ .

- On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	0	$\frac{1}{4}$	0

La limite de  $f$  en  $+\infty$  est obtenue en remarquant :

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

### VI.0.b) Bonne définition d'une suite récurrente d'ordre 1

Dans la suite de la section **VI**, on illustrera le propos à l'aide de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

#### Remarque

- La fonction  $f$  n'est pas définie sur  $\mathbb{R}$  tout en entier. Il est donc possible, a priori, de tomber sur un rang  $n_0$  tel que  $u_{n_0} = -1$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n)$  ne serait pas bien définie. Ce n'est donc pas parce que l'énoncé indique qu'on considère « La suite  $(u_n)$  définie par ... » que la suite  $(u_n)$  est pour autant bien définie. Cela exige démonstration !
- Insistons sur le fait que le problème provient du fait que la fonction  $f$  qui définit  $(u_n)$  n'est pas définie sur tout l'ensemble  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est définie en tout point de  $\mathbb{R}$ , la suite  $(u_n)$  définie à partir de  $f$  est bien définie et il n'y a pas lieu d'en faire une quelconque démonstration.

#### Exercice

Démontrer que la suite  $(u_n)$  introduite au-dessus est bien définie.

*Démonstration.*

Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où  $\mathcal{P}(n)$  :  $u_n$  bien défini et  $u_n \geq 0$ .

#### ► Initialisation :

Par définition :  $u_0 = 1 \geq 0$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

#### ► Hérité : soit $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

(i.e.  $u_{n+1}$  bien défini et  $u_{n+1} \geq 0$ )

Par hypothèse de récurrence,  $u_n$  bien défini et  $u_n \geq 0$ .

Comme  $u_n \geq 0$ , alors  $u_n \neq -1$ . Ainsi, la quantité  $f(u_n)$  est bien définie.

De plus, comme  $f$  est croissante :

$$f(u_n) \geq f(0) = 0$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ . □

#### Remarque

- La partie qui apparaît en rouge dans ce raisonnement est réservée au cas des suites récurrentes d'ordre 1 pour lesquelles la fonction de définition  $f$  n'est pas définie sur  $\mathbb{R}$  tout en entier.
- Cette première récurrence est l'occasion de faire un point sur la notion de variable muette.

Rappelons tout d'abord que dans une proposition mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur. Ainsi, dans les propositions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$$

la variable  $n$  est muette. Cela signifie qu'on peut renommer la variable  $n$  sans que cela ne change le sens de la proposition mathématique. Ainsi, les propositions :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(m) \qquad \exists k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$$

ont même sens que les propositions précédentes.

En revanche, si on considère seulement la proposition  $\mathcal{P}(n)$  (sans faire apparaître de quantificateur devant), on obtient un objet mathématique qui dépend de ce  $n$  particulier. Le manque de compréhension de la notion de variable muette a pour conséquence trois erreurs classiques :

1) Montrons par récurrence :  ~~$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$~~ .

→ par récurrence, on démontre qu'une propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pas seulement à un rang  $n$  donné.

2) ...où  $\mathcal{P}(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \dots$

→ nous avons déjà discuté de ce point au-dessus : une propriété commençant par  $\forall n \in \mathbb{N}$  est indépendante de  $n$  (c'est alors une variable muette).

3) Supposons :  ~~$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$~~  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

→ ceci n'a pas de sens ! On ne peut supposer la propriété vraie pour tout  $n$  : c'est précisément ce que l'on souhaite démontrer.

Si l'une ou l'autre de ces erreurs est présente dans la rédaction, la récurrence ne sera pas lue et aucun point ne sera attribué sur la question.

Pour plus de détails sur la notion de quantificateurs, on renvoie au [cours de logique](#) de première année. On y trouve notamment les principaux schémas de rédaction. Pour plus de détails sur les récurrences, on renvoie au [cours sur les récurrences, calculs de sommes et produits](#).

- Pour poursuivre la discussion au-dessus, il faut comprendre qu'écrire :

$\mathcal{P}(n)$  : La suite  $(u_n)$  est bien définie

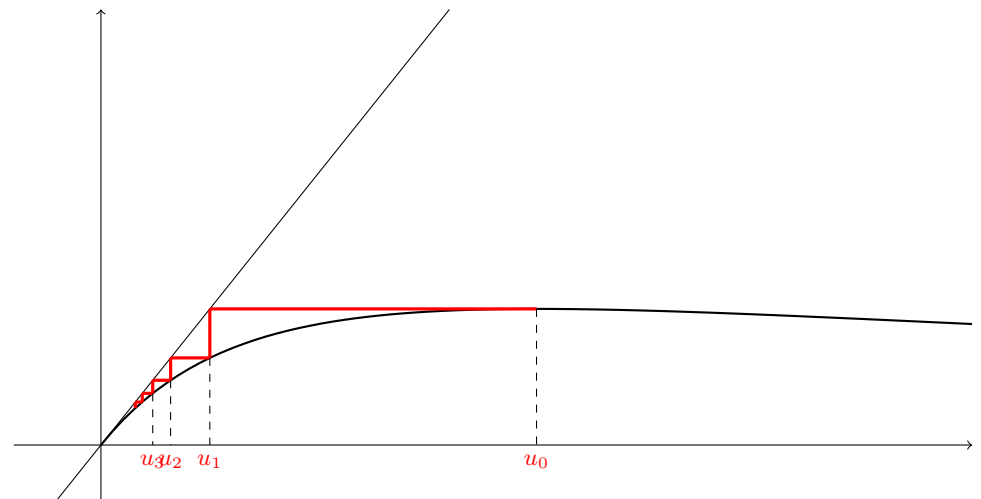
n'aurait aucun sens. En effet, dans l'écriture « suite  $(u_n)$  », la variable  $n$  est liée et muette. Ainsi, la propriété  $\mathcal{P}(n)$  telle qu'écrite au-dessus ne dépend en réalité pas de  $n$ . En particulier,  $\mathcal{P}(0)$  s'écrit alors :

$\mathcal{P}(0)$  : La suite  $(u_n)$  est bien définie

Ainsi, l'étape d'initialisation consisterait à démontrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie ! Si on pouvait le faire dès cette étape, une récurrence serait tout à fait inutile.

- On a ajouté, dans la propriété démontrée par récurrence : «  $u_n \geq 0$  ». Démontrer la bonne définition d'une suite, c'est démontrer que l'on va éviter, rang après rang, toutes les valeurs qui peuvent poser problème. Pour ce faire, dans l'hypothèse où on s'assure que la quantité  $u_n$  est bien définie, on ajoute que  $u_n$  se trouve dans un intervalle qui ne contient pas les valeurs interdites. Ici, la valeur interdite est  $-1$  et on ajoute alors la contrainte (par exemple)  $u_n \in [0, +\infty)$ .

### VI.0.c) Représentation graphique



#### Observations issues de la représentation graphique

- Les éléments de la suite  $(u_n)$  semblent tous se retrouver dans  $[0, 1]$ .
- La suite  $(u_n)$  semble décroissante.
- La suite  $(u_n)$  semble converger vers 0.

Toutes ces propriétés sur la suite  $(u_n)$  peuvent se déduire de propriétés de la fonction  $f$ . Le but de cette section est de lister toutes ces propriétés de  $f$  et les conséquences qu'on peut en tirer sur la suite  $(u_n)$ .

### VI.1. Présence d'un intervalle $I$ stable par $f$ et conséquence pour $(u_n)$

#### VI.1.a) Notion d'intervalle $I$ stable par $f$

##### Définition

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

- L'intervalle  $I$  est stable par  $f$  si  $f(I) \subset I$ .
- Autrement dit :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \in I \Rightarrow f(x) \in I$ .  
Ce que l'on peut encore écrire :  $\forall x \in I, f(x) \in I$ .

#### VI.1.b) Obtention d'un intervalle stable par une fonction

Démontrons que l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ .

##### 1) En déterminant précisément $f([0, 1])$

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[0, 1]$ .

On en déduit :

$$f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, \frac{1}{4}] \subset [0, 1]$$

On en déduit que l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ .

##### 2) En raisonnant sur des inégalités

Soit  $x \in [0, 1]$ .

Autrement dit  $0 \leq x \leq 1$

ainsi  $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

donc  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$

(car la fonction  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$ )

On en déduit que  $f(x) \in [0, \frac{1}{4}] \subset [0, 1]$ .

Ainsi, l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ .

### Obtention d'un intervalle stable par théorème de la bijection

Profitons-en pour rappeler comment déterminer l'image d'un intervalle  $I$  par une fonction  $f$  dans le cadre idéal où  $f$  est **continue** et **strictement monotone** sur  $I$ .

$I$	Nature de l'intervalle $f(I)$	
	Cas $f$ strictement croissante sur $I$	Cas $f$ strictement décroissante sur $I$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

#### VI.1.c) Conséquence pour $(u_n)$ de la connaissance d'un intervalle stable par $f$

Cette propriété de  $f$  permet d'obtenir le résultat suivant sur  $(u_n)$ .

$$\left. \begin{array}{l} u_0 \in I \\ f(I) \subset I \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$$

##### Remarque

Cette propriété se montre par récurrence, type de raisonnement adapté puisque la suite  $(u_n)$  est définie par une relation de récurrence.

**Illustration sur notre exemple**

On sait que l'intervalle  $I = [0, 1]$  est stable par  $f$ . Cela doit nous permettre de démontrer que tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.

- Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$   
où  $\mathcal{P}(n)$  :  $u_n$  bien défini et  $u_n \in [0, 1]$ .

► **Initialisation** :

Par définition :  $u_0 = 1 \in [0, 1]$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

(i.e.  $u_{n+1}$  bien défini et  $u_{n+1} \in [0, 1]$ )

Par hypothèse de récurrence,  $u_n$  bien défini et  $u_n \in [0, 1]$ .

Comme  $u_n \geq 0$ , alors  $u_n \neq -1$ . Ainsi,  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien défini.

Comme  $u_n \in [0, 1]$  et comme  $[0, 1]$  est stable par  $f$ , on en déduit :

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ .

**Remarque**

- On a laissé ici la partie rouge de la rédaction. Évidemment, si on a déjà démontré que la suite  $(u_n)$  est bien définie, on n'a plus à le faire.
- Dans un énoncé, le terme d'intervalle stable (qui n'est pas officiellement au programme) ne sera certainement pas présent. Dans ce cas, on démontre à la volée la stabilité de l'intervalle par  $f$  dans la démonstration par récurrence. Plus précisément, on écrit ce qui suit.

Par hypothèse de récurrence  $0 \leq u_n \leq 1$

ainsi  $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$  (car  $f$  croissante sur  $[0, 1]$ )

donc  $0 \leq f(u_n) \leq \frac{1}{4}$

D'où  $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1]$ .

**VI.2. Monotonie de la fonction  $f$  et conséquence pour  $(u_n)$** **VI.2.a) Croissance de la fonction  $f$  et monotonie de  $(u_n)$** 

On considère un intervalle  $I$  stable par  $f$ .

Supposons que  $f$  est croissante. Cela signifie que  $f$  respecte l'ordre des inégalités. Deux cas se présentent alors :

× si  $u_0 \geq u_1$  alors, en appliquant  $f$  :

$$u_1 = f(u_0) \geq f(u_1) = u_2$$

Et en appliquant  $f$  de nouveau :

$$u_2 = f(u_1) \geq f(u_2) = u_3$$

En procédant ainsi de suite (il faudrait faire une récurrence pour être rigoureux), on arrive à démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$  (la suite  $(u_n)$  est croissante).

× si  $u_0 \leq u_1$  alors, par le même raisonnement, on parvient à démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$  (la suite  $(u_n)$  est décroissante).

En résumé, la croissance de  $f$  permet d'obtenir le résultat suivant sur  $(u_n)$ .

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \geq u_0 \\ f \text{ croissante sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ est croissante}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \leq u_0 \\ f \text{ croissante sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n) \text{ est décroissante}$$

**Remarque**

Concrètement, et de manière très classique pour l'étude des suites récurrentes, la croissance de la suite  $(u_n)$  va se démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Il faut évidemment faire attention à l'écriture de la propriété à démontrer. Plus précisément, il ne faudra surtout pas écrire :

~~$\mathcal{P}(n)$  : la suite  $(u_n)$  est croissante~~

mais bien :  $\mathcal{P}(n)$  :  $u_{n+1} \geq u_n$  (pour des raisons déjà exposées en remarque).

**Illustration sur notre exemple**

Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \leq u_n$ .

**► Initialisation :**

$$u_1 = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} \leq 1 = u_0.$$

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

**► Hérité :** soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$  (i.e.  $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ ).

Par hypothèse de récurrence,  $u_{n+1} \leq u_n$ .

En appliquant de part et d'autre la fonction croissante  $f$ , on obtient :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .

Autrement dit, la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**VI.2.b) Cas de la décroissance de la fonction  $f$  (BONUS)**

- Si la fonction  $f$  est décroissante sur  $I$  (intervalle stable par  $f$ ), la suite  $(u_n)$  n'est pas monotone.

Supposons par exemple :  $u_0 \leq u_1$  (l'autre cas se traite similairement).

Par application de  $f$  décroissante, on obtient :

$$u_1 = f(u_0) \geq f(u_1) = u_2$$

Ainsi,  $(u_n)$  n'est ni croissante ni décroissante (les termes  $u_1$  et  $u_2$  ne sont pas rangés dans le même ordre que les termes  $u_0$  et  $u_1$ ).

- Afin de pouvoir quand même utiliser le résultat dans le cas où  $f$  est décroissante, il suffit de remarquer que la fonction  $f \circ f : I \rightarrow I$  est alors croissante. Ceci se démontre facilement.

Soit  $(x, y) \in I^2$ .

Supposons	$x \leq y$	
alors	$f(x) \geq f(y)$	(car $f$ est décroissante sur $I$ )
donc	$f(f(x)) \leq f(f(y))$	(car $f$ est décroissante sur $I$ )

On peut alors étudier les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  en utilisant le résultat de ce paragraphe puisqu'elles sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+3} = (f \circ f)(u_{2n+1}) \end{cases}$$

- On pensera à l'utilisation de la propriété de recouvrement ou au théorème des suites extraites pour obtenir de l'information sur la suite  $(u_n)$  à partir des suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ .

**Exercice**

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 - u_n)^2 \end{cases}$

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto (1 - x)^2$ .

- 1) **a.** Étudier les variations de la fonction  $f$ .  
**b.** Vérifier que l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ .  
**c.** Déterminer les points fixes de la fonction  $f$ .  
**d.** Préciser le sens de variations de la fonction  $g = f \circ f$  sur  $[0, 1]$ .
- 2) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle monotone ?
- 3) **a.** Démontrer que  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont à valeurs dans  $[0, 1]$ .  
**b.** Démontrer que les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones. Préciser leur monotonie.  
**c.** Justifier que les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes. On note respectivement  $\ell_1$  et  $\ell_2$  les limites des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .  
**d.** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ?  
**e.** Déterminer  $\ell_1$  et  $\ell_2$ .



### VI.3. Une propriété permettant d'obtenir directement la monotonie de la suite $(u_n)$

On considère un intervalle  $I$  stable par  $f$ .

On a le résultat suivant.

$$\forall x \in I, f(x) \geq x \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ est croissante}$$

$$\forall x \in I, f(x) \leq x \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ est décroissante}$$

#### Remarque

La démonstration est directe (ne demande pas de raisonner par récurrence).

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En remplaçant  $x$  par  $u_n$  (valide car  $u_n \in I$ ), on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$$

### VI.4. Continuité de $f$ et point fixe

#### Théorème 12. (Théorème de composition des limites)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle de limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui admet en  $\ell$  une limite  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Alors la suite  $(f(u_n))$  admet la limite  $a$ .

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow \ell \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \ell} a \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = a$$

On considère un intervalle  $I$  stable par  $f$ .

Cette propriété sur  $f$  permet d'obtenir le résultat suivant sur  $(u_n)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \\ u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \\ f \text{ continue en } \ell \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \ell = f(\ell)$$

Autrement dit, la limite de la suite  $(u_n)$  (si elle existe), se trouve parmi les points fixes de  $f$ .

#### Remarque

- On dispose maintenant de la chaîne complète d'étude afin de réaliser l'étude d'une suite du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1) On démontre d'abord :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ .

2) On démontre ensuite que la suite  $(u_n)$  est croissante (ou décroissante).

3) Si  $I$  est un intervalle borné (c'est-à-dire si  $I$  a des extrémités finies), on en déduit que la suite  $(u_n)$  est convergente (car croissante majorée vers une limite finie  $\ell$ ).

On obtient de plus que  $\ell \in \bar{I}$ , adhérence de l'intervalle  $I$  (intervalle dans lequel on a ajouté ses bornes finies).

Par exemple, si  $I = ]0, 2[$ , on obtient :  $\ell \in [0, 2]$ .

4) Enfin, on démontre que  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .

Ainsi, s'il n'y a qu'un point fixe de  $f$  dans  $\bar{I}$  (c'est le cas le plus simple), c'est forcément la valeur de  $\ell$  cherchée.

- L'exercice suivant illustre un cas classique. On cherche à démontrer qu'un des points listés au-dessus n'est pas vérifié. Pour ce faire, on suppose par l'absurde qu'il l'est. Ce qui permet de conclure que les points suivants sont aussi vérifiés. On peut ainsi aboutir à une contradiction.

#### Exercice

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \exp(u_n) - 1 \end{cases}$

On note  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = e^x - 1$ .

1. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  a une unique solution qui est 0.

Déterminer le signe de  $f(x) - x$ . Préciser le sens de variation de  $f$ .

2. Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq u_{n+1}$ .

3. Montrer que  $(u_n)$  n'est pas majorée et en déduire sa limite.



Il faut toujours penser à raisonner par l'absurde quand on demande de démontrer qu'une propriété n'est pas vérifiée.

## VI.5. Étude de la suite $(u_n)$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis

### VI.5.a) Inégalité des accroissements finis

#### Théorème 13.

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(x, y) \in I^2$  où  $I$  est un intervalle réel.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ dérivable sur l'intervalle } I \\ \bullet \exists M \geq 0, \forall u \in I, |f'(u)| \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2, \\ |f(y) - f(x)| \leq M |y - x| \end{array}$$

#### Interprétation physique

Réécrivons le résultat de cette inégalité. Si  $t_1 \neq t_2$  :

$$\left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \right| \leq \max_{t \in [t_1, t_2]} (|f'(t)|)$$

- On fait apparaître un taux d'accroissement. Une telle quantité doit être pensée comme une **vitesse moyenne** : la quantité  $f(t_2) - f(t_1)$  représente alors le déplacement effectué par une voiture (par exemple) sur le laps de temps  $t_2 - t_1$ .
- Par définition, la dérivée d'une fonction en un point est obtenu comme limite d'un taux d'accroissement. Le taux d'accroissement s'interprétant comme une vitesse moyenne, sa limite en un point s'interprète comme une vitesse instantanée.
- Revenons à l'idée du déplacement de la voiture. Considérons que la voiture a effectué 200 km en 2H. Elle a donc roulé en moyenne à 100 km/H. Mais elle a eu des vitesses instantanées différentes durant le trajet. Le résultat de l'IAF est alors assez naturel : la vitesse moyenne de la voiture entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  est plus faible que la plus grande pointe de vitesse qu'elle a effectué.

### VI.5.b) Utilisation de l'IAF pour l'étude de $(u_n)$

- On se place dans le cadre de l'utilisation du théorème. Plus précisément, on considère un intervalle  $I$  stable par  $f$  et on suppose que :

×  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $I$ ,

×  $|f'|$  est majorée par un réel  $M$  sur l'intervalle  $I$ .

On peut alors en déduire, par application de l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$$

Enfin, on suppose que la fonction  $f$  possède (au moins) un point fixe que l'on note  $\alpha$  ( $\in I$ ).

- Les exercices d'étude de suites  $(u_n)$  à l'aide de l'IAF suivent la trame suivante.

1) On démontre tout d'abord :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ .

2) En appliquant l'inégalité à  $x = u_n \in I$  et  $y = \alpha \in I$ , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq M |u_n - \alpha|$$

3) D'où, par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq M^n |u_0 - \alpha|$

4) Si on sait de plus que  $0 \leq M < 1$ , alors  $M^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, par théorème d'encadrement, on obtient :  $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et u :  
ainsi  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ .

5) Il est aussi souvent demander d'écrire un programme **Scilab** permettant de trouver une valeur approchée à  $10^{-4}$  près de  $\alpha$ .

### Exercice

Soit la suite la suite  $(u_n)$  par :  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

On pose  $f(x) = \sqrt{x+1}$ .

1. Montrer que  $[0, 2]$  est stable par  $f$  et :  $\forall x \in [0, 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

2. Déterminer les points fixes de  $f$  sur  $] -1, +\infty[$ .

On note alors  $r$  l'unique point fixe dans  $[0, 2]$ .

3. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$ .

4. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{2} |u_n - r|$ .

5. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - r|$ .

6. En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

7. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

8. Déterminer un entier  $N$  tel que  $|u_N - r| \leq 10^{-5}$ .

9. Écrire un programme donnant une valeur approchée de  $r$  à  $10^{-5}$  près.

*Démonstration.*

1. • Soit  $x \in [0, 2]$ .

Alors  $0 \leq x \leq 2$

et  $1 \leq x+1 \leq 3$

donc  $\sqrt{1} \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3}$  (car  $\sqrt{\cdot}$  est croissante)

Enfin,  $\sqrt{1} = 1 \geq 0$  et comme  $3 \leq 4$ , on obtient  $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$ .

Ainsi, l'intervalle  $[0, 2]$  est stable par  $f$ .

• La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  car elle est la composée  $f = f_2 \circ f_1$  où :

×  $f_1 : x \mapsto x+1$  est :

– dérivable sur  $] -1, +\infty[$ ,

– telle que  $g(] -1, +\infty[) \subset ]0, +\infty[$ .

×  $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ , dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

Soit  $x \in [0, 2]$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \geq 0$$

On en déduit :

$$|f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2}$$

car  $x+1 \geq 1$  et donc  $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{1} = 1$ .

2. Soit  $x \in ]-1, +\infty[$ . Deux cas se présentent.

- Si  $x \in ]-1, 0[$  :  
l'équation  $0 \leq \sqrt{x+1} = x < 0$  n'admet pas de solution.
- Si  $x \geq 0$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= x \\ \Leftrightarrow x+1 &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Considérons le polynôme  $P(X) = X^2 - X - 1$ .

Il admet pour discriminant  $\Delta = 1 - 4(-1) = 5$ .

Ainsi,  $P$  admet pour racines :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Or comme  $\sqrt{5} \geq 2$ , alors  $1 - \sqrt{5} \leq -1 < 0$ . Ainsi :  $x_2 < 0$ .

D'autre part :  $0 \leq \sqrt{5} \leq 3$  donc  $\frac{1}{2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

On en conclut :  $r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

3. Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où  $\mathcal{P}(n) : u_n \in [0, 2]$ .

► **Initialisation** :

Par définition :  $u_0 = 0 \in [0, 2]$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$  (i.e.  $u_{n+1} \in [0, 2]$ ).

Par hypothèse de récurrence,  $u_n \in [0, 2]$ .

Comme  $u_n \in [0, 2]$  et comme  $[0, 2]$  est stable par  $f$ , on en déduit :

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 2]$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ .

4. D'après les questions précédentes :

- ×  $f$  est dérivable sur  $[0, 2]$ ,
- ×  $\forall x \in [0, 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0, 2]^2, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |y - x|$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En appliquant cette inégalité à  $y = u_n \in [0, 2]$  et  $x = r \in [0, 2]$ , on obtient :

$$|f(u_n) - f(r)| \leq \frac{1}{2} |u_n - r|$$

Et ainsi :  $|u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{2} |u_n - r|$ .

5. Démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où  $\mathcal{P}(n) : |u_n - r| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - r|$ .

► **Initialisation** :

Comme  $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ , on a bien :  $|u_0 - r| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - r|$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

(i.e.  $|u_{n+1} - r| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - r|$ )

D'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{2} |u_n - r|$$

Or par hypothèse de récurrence :  $|u_n - r| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - r|$ .

On en déduit donc :

$$|u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{2} |u_n - r| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - r|$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ .

6. Comme  $u_0 \in [0, 2]$  et  $r \in [0, 2]$ , alors :  $|u_0 - r| \leq 2$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, à l'aide de la question précédente :

$$|u_n - r| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - r| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

7. D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Or  $\frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Donc, par théorème d'encadrement :  $|u_n - r| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  ce qui équivaut à

$u_n - r \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et démontre ainsi que  $(u_n)$  est convergente de limite  $r$ .

8. • Il suffit de trouver  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\frac{1}{2^{N-1}} \leq 10^{-5}$$

• En effet, d'après la question précédente, on aura alors :

$$|u_N - r| \leq \frac{1}{2^{N-1}} \leq 10^{-5}$$

• On remarque alors :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-5} \Leftrightarrow (n-1) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(10^{-5}) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln)$$

$$\Leftrightarrow n-1 \geq \frac{-5 \ln(10)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (\text{car } \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{5 \ln(10)}{\ln(2)}$$

En choisissant  $N = \left\lceil \frac{5 \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$  (ou tout entier supérieur), on obtient

bien :  $|u_N - r| \leq 10^{-5}$ .

9. Le programme **Scilab** suivant stocke les valeurs successives de  $u_n$  dans une variable **u**. Après  $N$  itérations, on obtient la valeur attendue  $u_N$  qui est alors affichée.

```

1 N = ceil(5 * log(10) / log(2))
2 u = 0
3 for i = 1:N
4     u = sqrt(u+1)
5 end
6 disp(u)

```

□

## VII. Suites implicites

Une suite  $(u_n)$  est dite implicite lorsque son terme général n'est pas donné sous forme explicite mais comme solution d'une équation dont on ne peut déterminer directement la solution. Dans les énoncés, l'introduction d'une suite implicite se fait généralement de l'une des deux manières suivantes.

1) « Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution  $u_n$  dans l'intervalle  $I$ . »

(où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction indépendante de  $n$ )

Par définition, on a alors :  $f(u_n) = n$ .

Cette égalité est souvent fondamentale dans la suite de l'exercice.

### Exercice

On définit sur  $\mathbb{R}^{+*}$  la fonction  $f$  par :  $f(x) = x + \ln(x)$ .

- Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- Montrer que l'équation  $f(x) = n$  a une unique solution dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .  
On la note  $u_n$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

*Démonstration.*

- La quantité  $\ln(x)$  est définie pour  $x > 0$ .  
Ainsi,  $\mathcal{D}_f = ]0, +\infty[$ .
- De plus, la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .  
Ainsi,  $f$  est dérivable sur cet ensemble.  
Soit  $x \in ]0, +\infty[$ .

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

On obtient le tableau de variations suivant.

$x$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de $f$	$-\infty$	$+\infty$

- La fonction  $f$  est :
  - × continue sur  $]0, +\infty[$ ,
  - × strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
 Elle est donc bijective de  $]0, +\infty[$  sur  $f(]0, +\infty[)$ . Or :

$$f(]0, +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = ]-\infty, +\infty[$$

- On en déduit que tout  $y \in ]-\infty, +\infty[$  admet un unique antécédent  $x \in ]0, +\infty[$  par la fonction  $f$ .
- On note alors  $u_n (\in ]0, +\infty[)$  l'unique antécédent de  $n \in \mathbb{N}$ .  
(on a donc  $f(u_n) = n$ )

c. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Par définition, on a  $f(u_n) = n$  et  $f(u_{n+1}) = n + 1$ .  
On en déduit :  $n = f(u_n) < f(u_{n+1}) = n + 1$ .
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction  $f^{-1} : ]-\infty, +\infty[ \mapsto ]0, +\infty[$  est strictement croissante.
- En appliquant  $f^{-1}$  de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$f^{-1}(f(u_n)) = u_n < u_{n+1} = f^{-1}(f(u_{n+1}))$$

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

□

2) « Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $u_n$  dans l'intervalle  $I$ . »  
(où  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction qui dépend de  $n$ )

Par définition, on a alors :  $f_n(u_n) = 0$ .

### Exercice

On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction  $f_n$  par :  $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$ .

- Faire l'étude de la fonction  $f_n$ .
- Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , il existe une unique solution à l'équation  $f_n(x) = 0$ . On la notera  $u_n$ .
- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ .

*Démonstration.*

À vous de jouer!

□

## VIII. Croissances comparées

### VIII.1. Négligeabilité

#### Définition Négligeabilité

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

Soit  $(v_n)$  une suite telle que  $v_n \neq 0$  (à partir d'un certain rang).

- On dit que  $(u_n)$  est **négligeable** devant  $(v_n)$  si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

- Lorsque  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$ , on note  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ .
- À l'oral, on dit que «  $u_n$  est un petit o de  $v_n$  ». (o = 15<sup>ème</sup> lettre de l'alphabet)

#### Remarque

- On s'intéresse ici au comportement asymptotique (à l'infini) des suites. Plus précisément, on cherche ici à les classer suivant leur dominance, ce dont on se sert lors de la « mise en facteur du terme dominant ».
- Lorsque  $u_n = o(v_n)$ , on pourra utiliser, la notation  $u_n \ll v_n$ .
- Cette notation est parfois trompeuse. Il ne faut surtout pas confondre :  $u_n \ll v_n$  et  $u_n \leq v_n$ .  
(d'ailleurs  $(u_n \ll v_n) \not\Rightarrow (u_n \leq v_n)$  et  $(u_n \leq v_n) \not\Rightarrow (u_n \ll v_n)$ )
- On réservera donc cette notation pour l'écriture d'échelles asymptotiques (cf théorème 16).

#### Théorème 14.

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$$

$$\forall a > 0, \forall q > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$$

**Remarque**

- Ceci signifie que pour tout  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $q > 1$  :  $(\ln(n))^b \ll n^a \ll q^n$  ce qui s'écrit :  $(\ln(n))^b = o_{n \rightarrow +\infty}(n^a)$  et  $n^a = o_{n \rightarrow +\infty}(q^n)$ .
- On dira que la croissance logarithmique est beaucoup plus faible que la croissance polynomiale qui est elle-même beaucoup plus faible que la croissance exponentielle.
- Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{(\ln(n))^b} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty$$

- On en déduit aussi :  $\forall a > 0, \forall |q| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^a q^n = 0$

On en profite pour rappeler le comportement asymptotique des suites géométriques.

**Théorème 15.**

Soit  $q$  un réel tel que  $q \neq 0$ .

- 1) Si  $q = 1$ , alors  $(q^n)$  est constante (= 1) et converge donc vers 1.
- 2) Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .
- 3) Si  $|q| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
- 4) Si  $q \leq -1$ , alors  $(q^n)$  n'admet pas de limite.

**Théorème 16.** (Échelle de comparaison asymptotique)

Pour tout  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $q > 1$ , on a :

$$(\ln(n))^b \ll n^a \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

i.e.  $(\ln(n))^b = o_{n \rightarrow +\infty}(n^a)$ ,  $n^a = o_{n \rightarrow +\infty}(q^n)$ ,  $q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!)$ ,  $n! = o_{n \rightarrow +\infty}(n^n)$

**Exercice**

Déterminer la limite des suites  $(\frac{e^{n^2}}{n})$  et  $(\frac{e^{\sqrt{n}}}{n})$ .

**VIII.2. Équivalence****VIII.2.a) Définition****Définition** *Équivalence*

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

Soit  $(v_n)$  une suite telle que  $v_n \neq 0$  (à partir d'un certain rang).

- On dira que  $(u_n)$  est **équivalente** à  $(v_n)$  et on notera  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

**Remarque**

- On s'intéresse encore au comportement asymptotique (à l'infini) des suites. Plus précisément, dire que  $(u_n)$  est  $(v_n)$  sont équivalentes, c'est dire que ces deux suites ont même comportement asymptotique.
- Trouver un équivalent  $(v_n)$  à une suite  $(u_n)$  c'est trouver une suite  $(v_n)$  possédant le même comportement asymptotique que  $(u_n)$  et dont l'expression est plus simple.
- En première année, on parle plutôt de recherche de termes dominants. Rappelons brièvement ce procédé. Lorsque l'on cherche la limite d'une **SOMME** de termes, on met en facteur celui qui a la plus forte croissance (on le repère souvent à l'aide du théorème des croissances comparées). Ce faisant, le deuxième facteur obtenu a pour limite 1. Voici un exemple de recherche de terme dominant en  $+\infty$  :

$$\frac{-4n^2 e^n + 2 \ln(n) + 5n^7 \ln(n)}{2n^3 + 5} = \frac{-4\cancel{n^2} e^n}{2n^3} \frac{1 + \frac{2 \ln(n)}{-4n^2 e^n} + \frac{5n^7 \ln(n)}{-4n^2 e^n}}{1 + \frac{5}{2n^3}}$$

$$\text{avec } 1 + \frac{2 \ln(n)}{-4n^2 e^n} + \frac{5n^7 \ln(n)}{-4n^2 e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{5}{2n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$



## VIII.2.b) Propriétés générales

## Théorème 17.

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(w_n)$ , des suites réelles.

(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang)

La relation d'équivalence  $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$  vérifie les propriétés suivantes.

1) Réflexivité :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n}$$

2) Symétrie :

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n}$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire :  $\frac{u_n}{u_n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

2) Il suffit d'écrire :  $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$ .

3) Il suffit d'écrire :  $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times 1 = 1$ . □

## Remarque

La relation  $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$  est une relation binaire réflexive, symétrique, transitive.

Les relations vérifiant ce type de propriétés sont appelées des **relations d'équivalence**. Nous avons déjà rencontré ce type de relations binaires :

$\Leftrightarrow$  est une relation d'équivalence sur les propriétés mathématiques.

(les prochains chapitres fourniront d'autres exemples)

## VIII.2.c) Équivalents et limites

## Théorème 18.

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ , des suites réelles.

(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang)

1) Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \rightarrow \ell \ (\in \overline{\mathbb{R}}) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \rightarrow \ell}$$

2) Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite :

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell}$$

(avec  $\ell$  limite finie)

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n}$$

(avec  $\ell$  limite finie)

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire :  $u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times \ell = \ell$ .

2) Il suffit d'écrire :  $\frac{u_n}{\ell} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{\ell} = 1$ .

3) Il suffit d'écrire :  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{\ell} = 1$ .

### Remarque

- L'hypothèse  $\ell \neq 0$  est primordiale pour les propriétés du point 2.

Par exemple :

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{n} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$$

- Au passage, précisons que l'on ne doit **JAMAIS** écrire :  $u_n \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
  - × car la définition établie dans ce cours ne nous permet tout simplement pas de définir correctement cette écriture.
  - × car c'est un cas qui a peu d'intérêt pratique puisqu'il signifie que la suite  $(u_n)$  est nulle à partir d'un certain rang.
- Comme on l'a vu précédemment, la recherche d'équivalents (ou de termes dominants) ne se fait que lorsque l'on considère une **SOMME** de termes. Cependant, on peut parfois aussi simplifier les produits lorsque l'un des termes admet une limite finie **non nulle** au voisinage du point considéré.

Par exemple :

$$\times e^{1+\frac{1}{n}} \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^1 \times \ln(n).$$

$$\times \frac{\ln(n)}{2e^{\frac{1}{n}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2e^0} = \frac{1}{2} \ln(n).$$

$$\times \frac{e^n}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{\sqrt{1}} = e^n.$$

(on se sert ici de la compatibilité de  $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$  avec le produit : cf théorème suivant)

## VIII.2.d) Calculs d'équivalents en pratique : compatibilité avec le produit, le quotient, l'élevation à la puissance $\alpha$

### Théorème 19.

Soient  $(u_n), (v_n), (w_n), (z_n)$  des suites réelles.

(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang)

□

#### 1) Compatibilité avec le produit :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} z_n \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \times w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \times z_n$$

#### 2) Compatibilité avec le quotient :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} z_n \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{u_n}{w_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{z_n}$$

#### 3) Compatibilité avec l'élevation à la puissance $m \in \mathbb{N}$ . Pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow (u_n)^m \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n)^m$$

#### 4) Compatibilité avec l'élevation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ (u_n) \text{ strictement positive à} \\ \text{partir d'un certain rang} \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n)^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n)^\alpha$$

#### 5) Compatibilité avec la valeur absolue :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow |u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire :

$$\frac{u_n \times w_n}{v_n \times z_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times 1 = 1$$

2) Il suffit d'écrire :

$$\frac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{z_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{z_n}{w_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times 1 = 1$$

3) Deux cas se présentent.

× si  $m = 0$  :  $(u_n)^0 = 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 = (v_n)^0$ .

× si  $m \geq 0$  : alors, par compatibilité avec le produit :

$$(u_n)^m = u_n \times \dots \times u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \times \dots \times v_n = (v_n)^m$$

4) Comme  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ ,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont même signe (strictement positif) à partir d'un certain rang. D'autre part, pour tout  $n$  suffisamment grand :

$$\frac{(u_n)^\alpha}{(v_n)^\alpha} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha = \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(\alpha \times 0) = e^0 = 1$$

5) Il suffit d'écrire :

$$\left|\frac{u_n}{v_n}\right| = \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |1| = 1 \quad \square$$

### Remarque

Le théorème précédent établit que l'opérateur  $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$  est compatible avec les opérations de produit et quotient.

Il faut faire attention, ce n'est pas le cas de toutes les opérations.

1) Considérons l'exemple suivant.

$$\left. \begin{array}{l} u_n = n + \sqrt{n} \\ v_n = n + \ln(n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \text{ et } w_n = -n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n = z_n$$

mais  $\sqrt{n} = \cancel{u_n + w_n} \sim \cancel{v_n + z_n} = \ln(n)$ .



On ne peut sommer des équivalents !

2) Considérons l'exemple suivant.

$$\left. \begin{array}{l} u_n = n + 1 \\ v_n = n \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

mais  $e^{n+1} = \cancel{e^{u_n}} \sim \cancel{e^{v_n}} = e^n$  puisque  $\frac{e^{n+1}}{e^n} = e \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$



De manière générale, on ne peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence !

Ici, on avait en fait le résultat suivant :

$$e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n} \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \rightarrow 1 \Leftrightarrow e^{u_n - v_n} \rightarrow 1 \Leftrightarrow u_n - v_n \rightarrow 0$$

**Exercice**

1) Limite de la suite  $(u_n)$  de terme général :  $u_n = \frac{(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4})}{9n+10}$  ?

- $3n+4 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3n$  car  $\frac{3n+4}{3n} = 1 + \frac{4}{3n} \rightarrow 1$   
Ainsi :  $(3n+4)^3 = (3n+4)(3n+4)(3n+4) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (3n)(3n)(3n) = 3^3 n^3$ .
- $8n^{-2} + 2n^{-4} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 8n^{-2}$  car  $\frac{8n^{-2} + 2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \frac{2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \frac{1}{4n^2} \rightarrow 1$

On en déduit :  $(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^3 n^3 \times 8n^{-2} = 3^3 8n$

- $9n+10 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 9n$  car  $\frac{9n+10}{9n} = 1 + \frac{10}{9n} \rightarrow 1$

On en déduit :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3^3 8n}{9n} = 3 \times 8 = 24$ .  
Ainsi :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 24$ .

2) Limite de la suite  $(v_n)$  de terme général :  $v_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$  ?

3) Limite de la suite  $(w_n)$  de terme général :  $w_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$  ?

**Propriété**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $u_n \neq 0$  (à partir d'un certain rang).

Soit  $(v_n)$  une suite réelle.

Supposons que  $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)$ .

Alors :  $u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ .

*Démonstration.*

Il suffit de remarquer :

$$\frac{u_n + v_n}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} + \frac{v_n}{u_n} = 1 + \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \square$$

**Exercice**

Limite de la suite  $(u_n)$  de terme général :  $u_n = \frac{n^2 e^n + n e^{2n}}{n^3 (\ln(n)) + n (\ln(n))^3}$  ?

- $n^2 e^n + n e^{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n e^{2n}$ . En effet :

$$n^2 e^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n e^{2n}) \text{ puisque } \frac{n^2 e^n}{n e^{2n}} = \frac{n}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- $n^3 (\ln(n)) + n (\ln(n))^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3 (\ln(n))$ . En effet :

$$n (\ln(n))^3 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3 (\ln(n))) \text{ puisque } \frac{n (\ln(n))^3}{n^3 (\ln(n))} = \frac{(\ln(n))^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n e^{2n}}{n^3 (\ln(n))} = \frac{e^{2n}}{n^2 (\ln(n))}$ .

Or :  $\frac{e^{2n}}{n^2 (\ln(n))} = \frac{e^n}{n^2} \frac{e^n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  par croissances comparées.

D'où  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .



Cette propriété n'autorise en aucun cas à sommer des équivalents.  
La sommation d'équivalents est, rappelons-le, interdite !

**Remarque**

- Cette propriété signifie simplement que si  $(v_n)$  est négligeable devant  $(u_n)$ , le terme dominant de  $u_n + v_n$  n'est autre que  $u_n$ .
- Dans l'exercice précédent, on peut rédiger sans utiliser cette propriété.  
On a  $n^2 e^n + n e^{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n e^{2n}$  car :

$$\frac{n^2 e^n + n e^{2n}}{n e^{2n}} = \frac{n^2 e^n}{n e^{2n}} + \frac{n e^{2n}}{n e^{2n}} = \frac{n}{e^n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$



c) Remarquons tout d'abord :

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^5} = e^{n^5 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\text{Or : } n^5 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \underset{n \rightarrow +\infty}{n^3} \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi :  $n^5 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et par théorème de composition des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n^5 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$d) \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+2}.$$

$$\text{Ainsi : } (2n-3)^2 \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n-3)^2}{n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4n^2}{n} = 4n$$

□

## IX. Opérations - formes indéterminées (POLY)

Dans la suite, on parle de *forme indéterminée* (et on note F.I.) quand on ne peut déterminer, de manière générale, la limite d'une opération sur les suites. Dans ce cas, il faudra faire une étude au cas par cas.

### IX.1. Somme de deux suites

		Somme $u_n + v_n$		
$v_n \backslash u_n$	$l_1$	$l_1$	$+\infty$	$-\infty$
	$l_2$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	F.I.	$-\infty$

Le cas de la somme de deux suites apporte une F.I. :  $\infty - \infty$

### IX.2. Produit de deux suites

		Produit $u_n \times v_n$				
$v_n \backslash u_n$	$l_1 > 0$	$l_1 > 0$	$l_1 < 0$	$l_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$l_2 > 0$	$l_1 l_2$	$l_1 l_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l_2 < 0$	$l_1 l_2$	$l_1 l_2$	0	$-\infty$	$+\infty$	
$l_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.	
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	

Le cas du produit de deux suites apporte une F.I. :  $0 \times \infty$

### IX.3. Passage à l'inverse

On suppose ici que l'on peut former le quotient  $\frac{1}{u_n}$ , ce qui revient à dire que  $u_n \neq 0$ , au moins à partir d'un certain rang.

	Inverse $\frac{1}{u_n}$			
$u_n$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	0	
Si $u_n < 0$ à partir d'un certain rang	$\frac{1}{\ell}$	$-\infty$		0

### IX.4. Quotient

		Quotient $\frac{u_n}{v_n}$				
$u_n \backslash v_n$		$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$		$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$		$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	$v_n > 0$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
	$v_n < 0$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$		0	0	0	F.I.	F.I.
$-\infty$		0	0	0	F.I.	F.I.

Le cas du quotient de deux suites apporte deux F.I. :

$$\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}$$

### IX.5. Techniques pour lever une F.I.

Tout d'abord résumons les F.I. rencontrées lors de l'étude des différentes opérations algébriques :

$$\infty - \infty ; 0 \times \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}$$

Afin de lever un F.I., on pourra penser à utiliser l'une des méthodes (plus généralement une combinaison des méthodes) suivantes.

- Factoriser par le terme dominant (*i.e.* celui ayant la plus forte croissance). Autrement dit, trouver un équivalent simple de la suite.
- Penser à la quantité conjuguée.
- Pour les fonctions puissances : retour à la définition à l'aide des fonctions exp et ln.
- Penser aux croissances comparées.
- Utilisation du taux d'accroissement.
- Utilisation d'inégalités. Le théorème d'encadrement est souvent utilisé pour déterminer un équivalent ou pour montrer qu'une suite tend vers 0.