CH VIII : Intégration - rappels et compléments

I. Intégration sur un segment

I.1. Primitives sur un intervalle I

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
  a) F est dérivable sur I.
  b) $F' = f$.

Théorème 1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

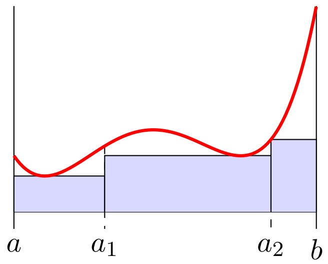
$$\boxed{f \text{ continue sur un } \textbf{intervalle } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ admet une primitive sur } I}$$

Démonstration.
Admis. □

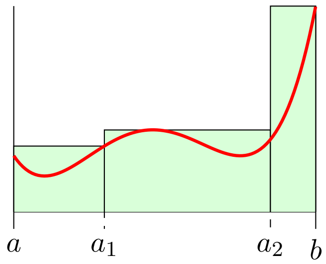
Remarque (CULTURE)

- La démonstration classique de ce résultat consiste à définir proprement la notion d'intégrale sur un segment $[a, b]$ d'une fonction continue sur $[a, b]$. Pour chaque subdivision $\mathscr{S}$: $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_i < \ldots < a_n = b$, on considère le minimum et le maximum de f sur $[a_i, a_{i+1}]$ et on définit :
  × $m(f, \mathscr{S})$ la somme des aires des rectangles sous la courbe de f.
  × $M(f, \mathscr{S})$ la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe de f.
  (le dessin suivant illustre cette définition)
- On considère alors toutes les subdivisions possibles et on récupère :
  × $I_m = \max\limits_{\mathscr{S}} \ m(f, \mathscr{S})$, plus grande valeur sous-approchée de l'aire.
  × $I_M = \min\limits_{\mathscr{S}} \ M(f, \mathscr{S})$, plus petite valeur sur-approchée de l'aire.
  Lorsque $I_m = I_M$, on dit que f est intégrable sur $[a, b]$ et on note :
$$\int_a^b f(t) \ dt = I_m = I_M$$
- La primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a est alors la fonction :
$$x \mapsto \int_a^x f(t) \ dt \quad \textit{(intégrale sur } [a, x]\textit{)}$$

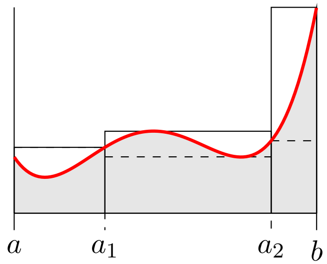
Représentation graphique.



Sous-approximation de l'aire sur la subdivision $\mathscr{S}$: (a_0, a_1, a_2, a_3)



Sur-approximation de l'aire sur la subdivision $\mathscr{S}$: (a_0, a_1, a_2, a_3)



L'aire sous la courbe sur le segment $[a, b]$ est comprise entre $m(f, \mathscr{S})$ et $M(f, \mathscr{S})$ pour la subdivision $\mathscr{S}$

Théorème 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.

Soit F une primitive de f sur I.

1) $\boxed{\text{$G$ est une primitive de f sur I} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : } \forall x \in I,\ G(x) \ = \ F(x) + \lambda}$

(on en déduit notamment que f admet une infinité de primitives sur I)

2) Soit $c \in I$.
Il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en c.
C'est la fonction $x \mapsto F(x) - F(c)$.

Démonstration.

1) ($\Rightarrow$) Soit G est une primitive de f sur I et soit $x \in I$. Par définition :

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

On en déduit que $F'(x) - G'(x) = 0$ ou encore : $(F - G)'(x) = 0$.
La dérivée de $F-G$ étant nulle sur I, la fonction $F-G$ est constante sur cet intervalle :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ (F - G)(x) = \lambda$$

($\Leftarrow$) Si $G = F + \lambda$, alors G est dérivable sur I car F l'est. De plus :

$$\forall x \in I,\ G'(x) = F'(x) = f(x)$$

et G donc une primitive de f sur I.

2) Soit G une primitive de f sur I.
D'après le point précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$G(x) = F(x) + \lambda$$

Si G s'annule en c, on obtient : $G(c) = F(c) + \lambda = 0$ et donc $\lambda = -F(c)$.

□

I.2. Intégrale sur un segment d'une fonction continue

I.2.a) Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
Soit F une primitive de f sur I et soit $(a, b) \in I^2$.
(on ne suppose pas ici $a < b$)

- On appelle **intégrale de** a **à** b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\ dt$ la quantité (le réel) :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \left[\ F(t)\ \right]_a^b \ = \ F(b) - F(a)}$$

Remarque

- La notion d'intégrale sur un segment est indépendante de la primitive choisie. En effet, si F et G sont deux primitives de f, alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ F = G + \lambda$$

Ainsi : $F(b) - F(a) \ = \ (G(b) + \lambda) - (G(a) + \lambda) \ = \ G(b) - G(a)$.

- La lettre t de la définition est une variable muette.
On notera donc, sans distinction :

$$\int_a^b f(t)\ dt \text{ ou } \int_a^b f(x)\ dx \text{ ou } \int_a^b f(u)\ du \ldots$$

- Il faut retenir que l'on définit ici la notion d'intégrale sur un segment.
  × Si $a < b$: comme f continue sur I, f est continue sur $[a, b]$ et on a défini l'intégrale sur $[a, b]$ de f.
  × Si $a \geqslant b$: alors f est continue sur $[b, a]$.

Par ailleurs, cette définition permet d'obtenir le résultat classique :

$$\int_a^b f(t)\ dt = -\int_b^a f(t)\ dt$$

- En réalité, comme on l'a vu dans la remarque initiale de ce cours (`CULTURE`), l'existence d'une primitive pour une fonction continue sur un intervalle I fait intervenir la notion d'intégrale (c'est la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$).
  On tourne donc en rond lorsqu'on prétend définir $\int_a^b f(t)\ dt$ à l'aide d'une primitive. Le programme prend logiquement le parti d'éviter la démonstration d'existence de primitive (relativement technique) afin de se concentrer sur les aspects pratiques fournis par cette définition.

I.3. Intégrale fonction de ses bornes

Théorème 3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** *sur un intervalle I.*

Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une prmitive de F sur I.

Soit $c \in I$.

$$\boxed{\text{La fonction } \begin{array}{rccc} H : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt \end{array} \text{ est la primitive de } f \text{ sur } I \text{ qui s'annule en } c.}$$

(Ainsi, pour tout $x \in I$, $H(x) = F(x) - F(c)$)

1) *En particulier, la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de dérivée f.*

$$\boxed{\forall x \in I,\ H'(x) = F'(x) = f(x)}$$

2) *Si de plus $u, v : J \to I$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle J, alors les fonctions :*

$$H_1 : x \mapsto \int_c^{v(x)} f(t)\ dt, \quad H_2 : x \mapsto \int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt, \quad H_3 : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$$

sont dérivables sur J. De plus, pour tout $x \in J$:

$$H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x)), \quad H_2'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$
$$H_3'(x) = v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x))$$

Démonstration.
Comme f est continue sur I, elle admet une primitive F sur I.

1) Pour $x \in I$: $\displaystyle\int_c^x f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^x = F(x) - F(c)$.

Ainsi $H : x \mapsto F(x) - F(c)$ et H est la primitive de f sur I qui s'annule en c (*cf* Théorème 2).
En particulier, la fonction H est dérivable sur I.
Sa dérivée f étant continue sur I, la fonction H est $\mathcal{C}^1$ sur I.

2) • Remarquons tout d'abord que, pour tout $x \in J$:

$$H_1(x) = \int_c^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_c^{v(x)} = F(v(x)) - F(c)$$

La fonction $x \mapsto F(v(x))$ est dérivable sur J car c'est la composée de :
× v, dérivable sur J. De plus, $v(J) \subset I$.
× F, dérivable sur I.
Par la formule de dérivation d'une composée, on obtient :

$$\forall x \in J,\ (F \circ v)'(x) = F'(v(x)) \times v'(x) = f(v(x)) \times v'(x)$$

et ainsi : $\forall x \in J,\ H_1'(x) = v'(x)\ f(v(x))$.

• De même : $\displaystyle\int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{c} = F(c) - F(u(x))$.

La fonction $H_2 : x \mapsto F(c) - F(u(x))$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J,\ H_2'(x) = -F'(u(x)) \times u'(x) = -u'(x)\ f(u(x))$$

• Enfin : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$.

La fonction $H_3 : x \mapsto F(v(x)) - F(u(x))$ est dérivable sur J et :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in J,\ H_3'(x) & = & F'(v(x)) \times v'(x) - F'(u(x)) \times u'(x) \\ & = & v'(x)\ f(v(x)) - u'(x)\ f(u(x)) \end{array}$$

□

Exercice. *(d'après* EDHEC 2016*)*
Pour chaque entier n on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$$

a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$.

b) En déduire le sens de variation de f_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) La fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Notons alors H une primitive de h sur $\mathbb{R}$. Par définition :

$$\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt = [\ H(t)\ ]_n^x = H(x) - H(n)$$

La fonction f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ car H l'est. De plus :

$$\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n'(x) = H'(x) = h(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

b) D'après la question précédente : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} > 0$.
Ainsi, f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

□

Remarque

- On peut aussi remarquer de suite que la fonction :

$$f_n : x \mapsto \int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$$

est la primitive qui s'annule en n de la fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$, $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
Ainsi, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f_n'(x) = h(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

- Cependant, il est conseillé d'utiliser plutôt la méthode présentée dans le corrigé de l'exercice ci-dessous et dans la démonstration du Théorème 3.

Exercice

On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\, dt$.

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Démonstration.

- La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
(on détermine ici l'intervalle de continuité de h indépendamment du reste de l'exercice)
Elle admet donc une primitive H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
(on précise toujours le caractère $\mathcal{C}^1$ dès le début de l'exercice)
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition :

$$g(x) = \int_{-x}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\, dt = [\ H(t)\ ]_{-\sqrt{x}}^{x^2} = H(x^2) - H(-\sqrt{x})$$

La fonction $x \mapsto H(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $H \circ v$ où :

× $v : x \mapsto x^2$ est :
  - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
  - telle que $v(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$

× H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto H(-\sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la composée $H \circ u$ où :

× $u : x \mapsto -\sqrt{x}$ est :
  - dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
  - telle que $u(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}$

× H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(dans une épreuve, on pourra se permettre de ne démontrer que la dérivabilité de $H \circ v$ et de signaler qu'on procéderait de même pour $H \circ u$)
On en déduit que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x\ H'(x^2) + \frac{1}{2\ \sqrt{x}}\ H'(-\sqrt{x}) \\ &= 2x\ h(x^2) + \frac{1}{2\ \sqrt{x}}\ h(-\sqrt{x}) \ = \ 2x\ \frac{\ln(1+x^4)}{\mathrm{e}^{x^2}} + \frac{1}{2\ \sqrt{x}}\ \frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

(la première ligne est simplement une illustration de la formule de dérivation d'une composée) □

Le résultat du Théorème 3 doit être appliqué de manière très précise. Le point ***1)*** ne peut être appliqué puisque la fonction :

$$g : x \mapsto \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}\ dt$$

n'est `EN AUCUN CAS` une primitive de la fonction $h : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{\mathrm{e}^t}$.
On est ici dans le cadre d'application du point ***2)*** et on utilise la méthode correspondante (*cf* exercice précédent).

I.3.a) Calcul de primitives « à vue »

Principe.
Il s'agit ici de calculer une intégrale en devinant une de ses primitives. Autrement dit, il faut être capable de voir la fonction f à intégrer comme la dérivée d'une autre fonction.

Exemple

- $\displaystyle\int_0^1 5\ dt = \Big[\ 5\ t\ \Big]_0^1 = 5\,(1-0) = 5$

- $\displaystyle\int_0^1 t^2\ dt = \left[\ \frac{1}{3}\ t^3\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}\,(1-0) = \frac{1}{3}$

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{t}\ dt &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\ dt \\ &= \left[\ \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\ \Big[\ t\ \sqrt{t}\ \Big]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\ (1-0) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{1}{t}\ dt = \Big[\ \ln(|t|)\ \Big]_{-1}^{-2} = \ln(|-2|) - \ln(|-1|) = \ln(2) - \cancel{\ln(1)}$

- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\ dt = \Big[\ \mathrm{e}^t\ \Big]_0^1 = (\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0) = \mathrm{e}^1 - 1$

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^3}\ dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 2t\ (t^2+1)^{-3}\ dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \frac{(t^2+1)^{-2}}{-2}\ \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4}\left[\ \frac{1}{(t^2+1)^2}\ \right]_0^1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{16}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\ dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 2t\ (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\ dt \\ &= \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left[\ \frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}}\ \right]_0^1 \\ &= \Big[\ \sqrt{t^2+1}\ \Big]_0^1 \\ &= \sqrt{2}-\sqrt{1}\ =\ \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)}\ dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)}\ dt \\ &= \frac{1}{2}\ \Big[\ \ln(|t^2+1|)\ \Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ (\ln(2) - \cancel{\ln(1)})\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}\ dt &= -\int_1^2 \frac{-1}{t^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\ dt \\ &= -\Big[\ \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\ \Big]_1^2 \\ &= -\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{1}}\right) \\ &= \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

Primitives classiques.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{-*}$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$

(où λ est un réel quelconque)

Remarque
Il ne faut pas confondre x^α (avec $\alpha \neq -1$) et a^x (avec $a > 0$) :
× pour tout $x > 0$: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.
× pour tout $x \in \mathbb{R}$: $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	× u dérivable sur I. × $u \neq 0$ sur I.	$x \mapsto \ln(\lvert u(x)\rvert) + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$

Remarque

- Il faut penser à la forme $x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ dès que la fonction à intégrer contient une puissance. Par exemple :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\,dt &= \int_0^1 \frac{t}{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]_0^1 = \left[\sqrt{t^2+2}\,\right]_0^1 = \sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

- Cette primitive classique est parfois présentée sous la forme suivante :

$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{(u(x))^\beta}$ (avec $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto -\dfrac{1}{\beta-1}\dfrac{1}{(u(x))^{\beta-1}} + \lambda$

II. Extension de la notion d'intégrale

II.1. Extension à des fonctions continues sur $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$

Définition

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est une **intégrale impropre en $+\infty$**.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ **converge** si la fonction :
  $$\begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt}$$
  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ **diverge**.
- Soit $f :]-\infty,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]-\infty,b]$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ est une **intégrale impropre en $-\infty$**.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ **converge** si la fonction :
  $$\begin{array}{ccc}]-\infty,b] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\,dt}$$
  - × Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ **diverge**.
- Soit $f :]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est une **intégrale impropre à la fois en $-\infty$ et $+\infty$**.
  - × On dit l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ **converge** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt$ sont toutes deux convergentes.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt}$$
  - × Dans le cas contraire, *i.e.* si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ **diverge**.
  (en pratique, considérer $c = 0$ suffit à conclure : cf remarque suivante)

Remarque

- Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

  Quelle est la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$? $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$? $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$?

  Toutes ces intégrales sont convergentes. En effet, d'après la relation de Chasles du chapitre intégration sur un segment, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\text{et donc} \quad \int_a^x f(t)\,dt = \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^a f(t)\,dt$$

  Par hypothèse, $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$. Ainsi, par l'égalité précédente, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ admet aussi une limite finie en $+\infty$ et :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt - \int_1^a f(t)\,dt$$

- Ainsi, la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ implique la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- La convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ ne dépend donc pas de l'élément c apparaissant dans la définition.
- En pratique, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ **converge** si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont convergentes. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ **diverge**.

$\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$: étude de l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$. où f est continue sur $[a, +\infty[$.

1) On rappelle que f est continue sur $[a, +\infty[$.

2) On introduit $B \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^B f(t)\,dt$, intégrale sur le segment $[a, B]$, admet une limite finie lorsque $B \to +\infty$.
(comme f est continue sur $[a, +\infty[$, f est aussi continue sur $[a, B]$)

3) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exemple

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\,dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto t$ est continue sur $[1, +\infty[$.

  2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^B = \frac{1}{2}\left[\,t^2\,\right]_1^B = \frac{1}{2}\left(B^2 - 1\right) \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\,dt$ est divergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto 1$ est continue sur $[0, +\infty[$.

  2) Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^B 1\,dt = \left[\,t\,\right]_0^B = B \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,dt$ diverge.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

  2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B \frac{1}{t}\, dt = \big[\ \ln(|t|)\ \big]_1^B = \ln(B) - \cancel{\ln(1)} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  3) On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ diverge.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

  2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_1^B \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt &= \int_1^B t^{-\frac{3}{2}}\, dt = \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^B = -2\ \left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_1^B \\ &= -2\left(\frac{1}{\sqrt{B}} - 1\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 2\end{aligned}$$

  3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt$ converge.

  De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt = 2$.

Penser à faire apparaître les quantités comme des puissances : $\dfrac{1}{t\sqrt{t}} = t^{-\frac{3}{2}}$

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

  2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^B = -\left[\frac{1}{t}\right]_1^B = -\left(\frac{1}{B} - 1\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

  3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

  De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

  2) Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B \mathrm{e}^{-t}\, dt = \big[\ -\mathrm{e}^{-t}\ \big]_1^B = -\big[\ \mathrm{e}^{-t}\ \big]_1^B = -(\mathrm{e}^{-B} - \mathrm{e}^{-1}) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

  3) On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ converge.

  De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

II.2. Extension à des fonctions continues sur $[a, b[$ ou $]a, b]$

Définition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

- Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre en** b.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **converge** si la fonction :
  $$\begin{array}{ccc} [a, b[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers b.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **diverge**.
- Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b]$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre en** a.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **converge** si la fonction :
  $$\begin{array}{ccc}]a, b] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_x^b f(t)\, dt \end{array}$$
  admet une limite finie lorsque x tend vers a.
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\, dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **diverge**.
- Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b[$.
  - $\times$ On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est une **intégrale impropre à la fois en a et b**.
  - $\times$ On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **converge** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ sont toutes deux convergentes.
  (dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in]a, b[$)
  Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donnée par :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt}$$
  - $\times$ Dans le cas contraire, *i.e.* si, pour tout $c \in]a, b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\, dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\, dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ **diverge**.
  (en pratique, considérer un seul élément $c \in]a, b[$ suffit)

Remarque

Cette définition est analogue à celle d'intégrale impropre en $+\infty$.
L'étude de ces intégrales généralisées est donc similaire à l'étude précédente.

$\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$: étude de l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ où f est continue sur $[a,b[$.

1) On rappelle que f est continue sur $[a,b[$.

2) On introduit $B \in [a,b[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$, intégrale sur le segment $[a,B]$, admet une limite finie lorsque $B \to b$.
(comme f est continue sur $[a,b[$, f est aussi continue sur $[a,B]$)

3) Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exemple

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\ dt$.

  1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-2}$ est continue sur $[0,2[$.

  2) Soit $B \in [0,2[$.

$$\begin{aligned} \int_0^B \frac{1}{t-2}\ dt &= \Big[\ \ln(|t-2|)\ \Big]_0^B \\ &= \Big[\ \ln(2-t)\ \Big]_0^B \\ &= \ln(2-B) - \ln(2) \underset{B\to 2}{\longrightarrow} -\infty \end{aligned}$$

  3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t-2}\ dt$ est donc divergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$.

  1) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.

  2) Soit $A \in]0,1]$.
  On procède alors par intégration par parties (IPP).
  (on y reviendra plus tard dans le chapitre)

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[A,1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^1 \ln(t)\ dt &= \Big[\ t\ \ln(t)\ \Big]_A^1 - \int_A^1 1\ dt \\ &= -A\ \ln(A) - (1-A) \\ &= A - A\ \ln(A) - 1 \underset{A\to 0}{\longrightarrow} -1 \end{aligned}$$

  3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$ est donc convergente.
  De plus : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt = -1$.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.

  2) Soit $A \in\ ]0,1]$.
  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = t & v(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[A,1]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_A^1 t\ \ln(t)\ dt & = & \left[\ \dfrac{t^2}{2}\ \ln(t)\ \right]_A^1 \ - \ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_A^1 t\ dt \\ & = & -\dfrac{A^2}{2}\ \ln(A) \ - \ \dfrac{1}{2}\left[\ \dfrac{t^2}{2}\ \right]_A^1 \\ & = & -\dfrac{A^2}{2}\ \ln(A) \ - \ \dfrac{1}{4}\left[\ t^2\ \right]_A^1 \\ & = & \dfrac{1}{4}\ A^2 - \dfrac{1}{2}\ A^2\ \ln(A) - \dfrac{1}{4} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{4} \end{array}$$

  En effet : $\displaystyle\lim_{A\to 0} A^2\ \ln(A) = \lim_{A\to 0} A \times A\ \ln(A) = 0$.

  3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt$ est donc convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_0^1 t\ \ln(t)\ dt = -\dfrac{1}{4}$.

Remarque

- Comme $t\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut prolonger la fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ par continuité en posant $f(0) = 0$. En notant toujours f la fonction ainsi prolongée, l'objet $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ n'est plus une intégrale impropre mais l'intégrale sur un segment de la fonction f continue sur $[0,1]$.

  De telles intégrales sont appelées **intégrales faussement impropres**.

- Ce constat permet de démontrer que l'objet $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ est bien défini.
  Toutefois, cela ne permet pas de connaître la valeur de cette intégrale. Si l'énoncé exige cette valeur, il est nécessaire d'effectuer l'étape ***2)*** (on introduit $x \in\ ]0,1]$, on travaille sur une intégrale sur un segment et on détermine la limite lorsque $x \to 0$).

II.3. Extension à des fonctions continues sur un intervalle quelconque

II.3.a) Intervalle ouvert quelconque

On a vu précédemment la notion d'intégrale impropre en ∞ et la notion d'intégrale impropre en un point. On peut aussi considérer des intégrales impropres à la fois en un point et en l'infini.

Définition

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

- Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b[$.
  - × On dit que l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est une **intégrale impropre à la fois en a et b**.
  - × On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **converge** s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
    (dans la pratique, on prend n'importe quel $c \in]a, b[$)
    Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^c f(t)\ dt \ + \ \int_c^b f(t)\ dt}$$

  - × Dans le cas contraire, *i.e.* si, pour tout $c \in]a, b[$, l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **diverge**.
    (en pratique, considérer un seul élément $c \in]a, b[$ suffit)

Remarque

Cette définition recouvre tous les cas précédents d'intégrale doublement impropre. L'étude de telles intégrales s'effectue donc de manière similaire.

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

2) • Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$.

(i) La fonction f est continue sur $]0, 1]$.

(ii) Soit $A \in]0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\int_A^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt &= -\int_A^1 \frac{-1}{2\sqrt{t}}\ e^{-\sqrt{t}}\ dt \\
&= -\Big[\ e^{-\sqrt{t}}\ \Big]_A^1 \\
&= -(e^{-1} - e^{-\sqrt{A}}) \\
&= e^{-\sqrt{A}} - \frac{1}{e} \underset{A \to 0}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

(iii) On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\ dt = 1 - \frac{1}{e}$.

- Étudions maintenant la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$.

(i) La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$.

(ii) Soit $B \in [1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_1^B \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt &= -\left[\, e^{-\sqrt{t}}\,\right]_1^B \\ &= -(e^{-\sqrt{B}} - e^{-1}) \\ &= \frac{1}{e} - e^{-\sqrt{B}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}\end{aligned}$$

(iii) On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{e}$.

3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente. De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt &= \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt \\ &= \left(1-\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} \\ &= 1\end{aligned}$$

II.3.b) Extension au cas des fonctions ayant un nombre fini de points de discontinuité sur un intervalle I

Définition

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Soit f une fonction ayant un nombre fini de points de discontinuité sur l'intervalle $]a,b[$ (ou $]a,b]$, ou $[a,b[$ ou $[a,b]$).

Autrement dit, il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$.

- On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les intégrales impropres $\displaystyle\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\, dt$ sont convergentes.

  Si c'est le cas la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est donnée par :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\, dt$$

Exemple

Étude de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}$ est continue sur $]-\infty,0[\, \cup\,]0,+\infty[$.

2) - Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt$.

Pour $t \in [0,+\infty[$, $|t| = t$. Ainsi : $\dfrac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}} = \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$.

Cette intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt$ est convergente et vaut 1 (*cf* exemple précédent).

- Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt$.

  Pour $t \in]-\infty, 0]$, $|t| = -t$. Ainsi : $\dfrac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}} = \dfrac{e^{-\sqrt{-t}}}{2\sqrt{-t}}$.

  On calcule alors cette intégrale impropre à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$.

  | $u = -t$ (donc $t = -u$)
  | $\hookrightarrow du = -\, dt$ et $dt = -du$
  | • $t = -\infty \Rightarrow u = +\infty$
  | • $t = 0 \Rightarrow u = 0$

  Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
  On obtient :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{2\sqrt{-t}}\, dt = \int_{+\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}\, (-du) = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}\, du$$

  Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt$ est convergente.

  De plus : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt = 1$.

3) On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{2\sqrt{|t|}}\, dt \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = 2\end{aligned}$$

Remarque

- Le programme officiel stipule que « les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a fait dans l'exemple).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

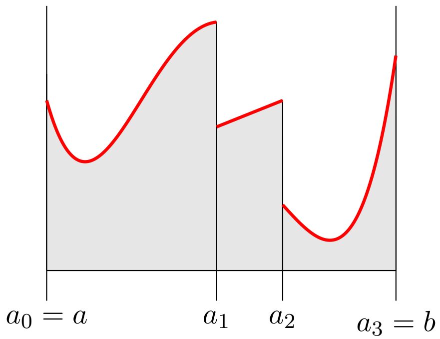
Un cadre idéal : le cas des fonctions continues par morceaux

Définition

- Une fonction f est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:
  - × f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
  - × f admet une limite à droite finie en a_i,
  - × f admet une limite à gauche finie en a_{i+1}.
- On peut alors, pour tout intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, considérer la fonction $\tilde{f}_i$ obtenue par prolongement par continuité de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ apparaît alors comme somme d'intégrales de fonctions continues sur un segment, ce qui démontre la bonne définition d'un tel objet :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t)\, dt}$$

Représentation graphique.



Exercice *(d'après* `EDHEC 2016`*)*
Dans l'épreuve `EDHEC 2016`, on considérait une v.a.r. X dont on déterminait une densité f_X :

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -3 \\ \dfrac{p}{4} & \text{si } x \in \,]-3,-1[\\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in [-1,1] \\ \dfrac{1-p}{4} & \text{si } x \in \,]1,3[\\ 0 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Il s'agissait alors de démontrer que X admet une espérance et de donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Démonstration.

- X admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$ est absolument convergente.
  Pour les calculs de moments, ceci équivaut à démontrer de la convergence.
- Remarquons tout d'abord que :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \ = \ \int_{-3}^{3} t\ f_X(t)\ dt$$
  car f est nulle en dehors de $[-3,3]$.
- La fonction $t \mapsto t\ f(t)$ est **continue par morceaux** sur $[-3,3]$.
  On en déduit que $\displaystyle\int_{-3}^{3} t\ f_X(t)\ dt$ est bien définie et que X admet une espérance donnée par :
  $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \ = \ \int_{-3}^{3} t\ f_X(t)\ dt \\ &= \int_{-3}^{-1} t \times \frac{p}{4}\ dt + \int_{-1}^{1} t \times \frac{1}{4}\ dt + \int_{1}^{3} t \times \frac{1-p}{4}\ dt \\ &= \frac{p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{3} \ = \ 1-2p \end{aligned}$$
  □

Remarque

- La fonction $h : t \mapsto t\ f_X(t)$ `N'EST PAS` continue sur $[-3,3]$. En fait, elle n'est pas continue en -3, ni en -1, ni en 1, ni en 3. Par contre h est continue sur $]-\infty,-3[$, $]-3,-1[$, $]-1,1[$, $]1,3[$ et $]3,+\infty[$.
- Pour autant, cela ne signifie pas que l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{-1} h(t)\ dt$ est impropre.
  En effet, la fonction $h_{|]-3,-1[}$ (restriction de h sur l'ensemble $]-3,-1[$) :
  × admet une limite finie en -3 (égale à $-3\ \frac{p}{4}$),
  × admet une limite finie en -1 (égale à $-\frac{p}{4}$).
  Ainsi, $h_{|]-3,-1[}$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[-3,-1]$ ce qui justifie que l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{-1} h(t)\ dt$ est bien définie.
  Mais c'est la fonction $h_{|]-3,-1[}$ qui est prolongée par continuité et en aucun cas h (ce qui n'aurait pas de sens : la fonction h est définie en -3 et en -1, il n'y a pas lieu de la prolonger en ces points).

III. Calcul des intégrales impropres convergentes

Afin de calculer la valeur d'intégrales impropres convergentes, on se ramène toujours au cas des intégrales sur un segment.

III.1. Primitive à vue d'une intégrale impropre : un exemple

Exemple

- Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2) Soit $B \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt &= \int_0^B \mathrm{e}^t\ (1+\mathrm{e}^t)^{-2}\, dt \\ &= \left[\ \frac{(1+\mathrm{e}^t)^{-1}}{-1}\ \right]_0^B \\ &= -\left[\ (1+\mathrm{e}^t)^{-1}\ \right]_0^B \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\, dt = \frac{1}{2}$.

- Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ est continue sur $[0,\sqrt{2}[$.

2) Soit $B \in [0,\sqrt{2}[$.

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt &= -\frac{1}{2}\int_0^B (-2t)\ (2-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt \\ &= -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left[\ \frac{(2-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}}\ \right]_0^B \\ &= -(\sqrt{2-B^2}-2) \underset{B\to\sqrt{2}}{\longrightarrow} 2\end{aligned}$$

3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$ est convergente.

De plus : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt = 2$.

III.2. Intégration par parties

III.2.a) Intégration par parties d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème 4.

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.
Soit $(a,b) \in I^2$.

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt = \Big[\ u(t)\ v(t)\ \Big]_a^b - \int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt}$$

Ce qu'on peut lire :

$$\boxed{\int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt = \Big[\ u(t)\ v(t)\ \Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt}$$

Démonstration.
Pour simplifier les écritures, on suppose $a < b$.

- La fonction uv est $\mathcal{C}^1$ sur I comme produit de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur I.
  De plus :
  $$(uv)' = u'v + uv'$$
- Ainsi, la fonction uv est une primitive sur I de $u'v + uv'$.
  Cette dernière fonction est continue sur $[a,b]$ par somme/produit de fonctions continues sur $[a,b]$ (u $\mathcal{C}^1 \Rightarrow u'$ $\mathcal{C}^0$).
- On en déduit :
  $$\int_a^b (u'v + uv')(t)\ dt = \Big[\ u(t)v(t)\ \Big]_a^b$$
- Enfin, par linéarité de l'intégrale :
  $$\int_a^b (u'v + uv')(t)\ dt = \int_a^b (u'v)(t)\ dt + \int_a^b (uv')(t)\ dt$$

□

Remarque
Effectuer une IPP consiste donc à écrire la fonction dont on doit calculer l'intégrale comme un produit de deux fonctions ($u \times v'$) :
× dont l'une sera dérivée ($u \rightsquigarrow u'$),
× et l'autre sera intégrée ($v' \rightsquigarrow v$).

Exemple

- $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\ dt = \Big[\ t\ln(t)\ \Big]_1^2 - \int_1^2 1\ dt = 2\ln(2) - 1$
- $\displaystyle\int_1^2 t^2\ln(t)\ dt = \frac{1}{3}\Big[\ t^3\ln(t)\ \Big]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 t^2\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 t^k\ln(t)\ dt = \frac{1}{k+1}\Big[\ t^{k+1}\ln(t)\ \Big]_1^2 - \frac{1}{k+1}\int_1^2 t^k\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 (\ln(t))^2\ dt = \Big[\ (\ln(t))^2\ \Big]_1^2 - 2\int_1^2 \ln(t)\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\ dt = -\frac{1}{2}\Big[\ (t^2+1)^{-1}\ln(t)\ \Big]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)}\ dt$
  Or $\displaystyle\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$ donc ...
- $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{t^2}\ dt = \frac{1}{2}\Big[\ t^2 e^{t^2}\ \Big]_0^1 - \int_0^1 t e^{t^2}\ dt = \dots$

`À RETENIR`

Il faut s'empresser de dériver la fonction ln : en la dérivant, on tombe sur le calcul de la primitive d'une fonction rationnelle.

Application : calcul d'une primitive de ln
Soit $x > 0$.
Le calcul précédent fournit la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

$$\int_1^x \ln(t)\ dt = \Big[\ t\ln(t)\ \Big]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x\ln(x) - (x-1)$$

III.2.b) Intégration par parties d'une intégrale impropre : un exemple

Exemple

Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

2) Soit $B \in [1, +\infty[$.
On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \dfrac{1}{t} & u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \\ v'(t) = \dfrac{1}{t^2}\, e^{\frac{1}{t}} & v(t) = -e^{\frac{1}{t}} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1, B]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^B \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}\, dt &= \left[-\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} \right]_1^B - \int_1^B \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt \\ &= \left(e^1 - \frac{e^{\frac{1}{B}}}{B} \right) - \left[-e^{\frac{1}{t}} \right]_1^B \\ &= \left(\cancel{e^1} - \frac{e^{\frac{1}{B}}}{B} \right) - \left(\cancel{e^1} - e^{\frac{1}{B}} \right) \\ &= e^{\frac{1}{B}} - \frac{e^{\frac{1}{B}}}{B} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

3) On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.
De plus : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.

III.3. Changement de variable

III.3.a) Changement de variable pour une intégrale d'une fonction continue

Théorème 5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.
Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ tq $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq I$.

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\, dt}$$

Démonstration.

- La fonction f est continue sur l'intervalle I.
  Elle admet donc une primitive F sur I de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt &= [\ F(t)\ ]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = [\ (F \circ \varphi)(t)\ ]_\alpha^\beta \end{aligned}$$

- Par composée, la fonction $F \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur J. De plus :

$$(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \times \varphi' = f \circ \varphi \times \varphi'$$

- On en déduit :

$$[\ (F \circ \varphi)(t)\ ]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi \times \varphi'(t)\, dt$$

□

Aspect pratique

- Si on se réfère au théorème précédent, un changement de variable est la donnée d'une fonction φ.

  $\hookrightarrow$ calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\varphi : t \mapsto \ln(t)$.

  $$\left| \begin{array}{l} \varphi(t) = \ln(t) \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = \dfrac{1}{t} \\ \bullet\ \varphi(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = e \\ \bullet\ \varphi(\beta) = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta = e^2 \end{array} \right.$$

  Ce changement de variable est valide car φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[e, e^2]$.

  On obtient : $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_e^{e^2} \frac{1}{t+1}\,\frac{1}{t}\, dt$.

  On termine ce calcul en remarquant : $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$.

- En pratique, les changements de variable seront réalisés à l'aide de la méthode symbolique décrite ci-dessous.

  MÉTHODO : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = e^t}$

  $$\left| \begin{array}{l} u = e^t \ (\text{donc } t = \ln(u)) \\ \hookrightarrow du = e^t\ dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{1}{e^t}\,du = \dfrac{1}{u}\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = e^1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = e^2 \end{array} \right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[e, e^2]$.

  En remplaçant dt par $\dfrac{1}{u}\,du$ et e^t par u, on obtient :

  $$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u}\, du$$

  ce qui correspond au calcul précédent.

- L'idée du changement de variable est de faire disparaître une partie « gênante » de la quantité $f(t)$. Ainsi, on posera souvent le changement de variable : « $u =$ la racine présente dans l'intégrale ».

  MÉTHODO : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \sqrt{t}}$

  $$\left| \begin{array}{l} u = \sqrt{t} \quad (\text{donc } t = u^2) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\ dt \quad \text{et} \quad dt = 2\sqrt{t}\,du = 2\,u\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1} = 1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{2} \end{array} \right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto u^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \sqrt{2}]$.

  On obtient :

  $$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+u}\, 2u\ du = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{u}(u+1)}\, 2\cancel{u}\ du \\ &= 2\left[\ \ln(|u+1|)\ \right]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) \end{aligned}$$

- MÉTHODO : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\ dt$ en posant $\boxed{u = \sqrt{1+e^t}}$

  $$\left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1+e^t} \quad (\text{donc } e^t = u^2 - 1 \text{ et } t = \ln(u^2-1)) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}}\ dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{2\sqrt{1+e^t}}{e^t}\,du = \dfrac{2\,u}{u^2-1}\,du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1+e^0} = \sqrt{2} \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{1+e} \end{array} \right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u^2-1)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\sqrt{2}, \sqrt{1+e}]$. On obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\ dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{\cancel{u}}\,\frac{2\,\cancel{u}}{u^2-1}\ du$.

  On termine ce calcul en remarquant que : $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{u-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{u+1}$.

- Le programme officiel de première année précise que les « changements de variables autres qu'affines seront précisés dans les exercices ».
  Il faut donc comprendre que le changements de variable affines (ceux du type $\boxed{u = c\,t + d}$) ne seront pas (forcément) précisés.

Exercice

Considérons par exemple : $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2\,t+3}}\ dt$.

Montrer que $I = \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}}\ du$ et en déduire la valeur de I.

On effectue le changement de variable $\boxed{u = 2\,t + 3}$

$u = 2t + 3 \quad$ (donc $2\,t = u - 3$)
$\hookrightarrow du = 2\ dt \quad$ et $\quad dt = \dfrac{1}{2}\, du$
- $t = 0 \ \Rightarrow\ u = 2 \times 0 + 3 = 3$
- $t = 3 \ \Rightarrow\ u = 2 \times 3 + 3 = 9$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \dfrac{u-3}{2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[3, 9]$.

On obtient : $I = \displaystyle\int_3^9 \frac{\frac{1}{2}(u-3)}{\sqrt{u}}\ \frac{1}{2}\ du = \frac{1}{4} \int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}}\ du$.

Or : $\dfrac{u-3}{\sqrt{u}} = \dfrac{u}{\sqrt{u}} - \dfrac{3}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} - \dfrac{3}{\sqrt{u}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
4\ I \ &= \int_3^9 \sqrt{u}\ du - 3 \int_3^9 \frac{1}{\sqrt{u}}\ du \\
&= \left[\ \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\ \right]_3^9 - 3 \left[\ \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\ \right]_3^9 \ = \ \frac{2}{3}\left(9\sqrt{9} - 3\sqrt{3}\right) - 6\left(\sqrt{9} - \sqrt{3}\right) \\
&= \cancel{6\sqrt{9}} - 2\sqrt{3} - \cancel{6\sqrt{9}} + 6\sqrt{3} \ = \ 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Donc $I \ = \ \sqrt{3}$.

III.3.b) Changement de variable pour une intégrale impropre : un exemple

Exemple

Étude de la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + 1}$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{e^t + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2) Soit $B \in [0, +\infty[$. Posons le changement de variable $\boxed{u = e^t}$.

$u = e^t$ (donc $t = \ln(u)$)
$\hookrightarrow du = e^t\ dt \quad$ et $\quad dt = \dfrac{du}{e^t} = \dfrac{du}{u}$
- Si $t = 0$ alors $u = e^0 = 1$
- Si $t = B$ alors $u = e^B$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e^B]$.
On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^B \frac{dt}{e^t+1} \ &= \ \int_1^{e^B} \frac{du}{u(u+1)} \ = \ \int_1^{e^B} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\ du \\
&= \ \int_1^{e^B} \frac{du}{u} - \int_1^{e^B} \frac{du}{u+1} \ = \ \Big[\ \ln(|u|)\ \Big]_1^{e^B} - \Big[\ \ln(|u+1|)\ \Big]_1^{e^B} \\
&= \ \ln\left(\frac{e^B}{e^B+1}\right) + \ln(2) \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(2)
\end{aligned}$$

car $\dfrac{e^B}{e^B+1} \underset{B \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^B}{e^B} = 1$ et donc : $\ln\left(\dfrac{e^B}{e^B+1}\right) \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.

3) Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.
De plus : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \ln(2)$.

III.3.c) Changement de variable et parité dans le cas d'une intégrale impropre

Théorème 6.
Soit $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et soit $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ <u>continue</u> sur $]-a, a[$.

- *Si f est paire :*

  1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\ dt$ *converge.*

  2) *Dans ce cas :* $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2\int_{0}^{a} f(u)\ du}$

- *Si f est impaire :*

  1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\ dt$ *converge.*

  2) *Dans ce cas :* $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0}$

Démonstration.
Par définition :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\ dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{-a}^{0} f(t)\ dt \text{ et } \int_{0}^{a} f(t)\ dt \text{ convergent}$$

1) Supposons f paire.

($\Rightarrow$) Évident par définition.

($\Leftarrow$) On considère $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\ dt$. Sous réserve de convergence de cette intégrale, on effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$u = -t$ (donc $t = -u$)
$\hookrightarrow du = -\ dt$ et $dt = -\ du$
- $t = -a \Rightarrow u = -(-a) = a$
- $t = 0 \Rightarrow u = -0 = 0$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$.
On obtient ainsi :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = \int_{a}^{0} -f(-u)\ du = \int_{a}^{0} -f(u)\ du = \int_{0}^{a} f(u)\ du$$

(la deuxième égalité est obtenue par parité de la fonction f)
Ainsi, comme $\displaystyle\int_{0}^{a} f(u)\ du$ converge (par hypothèse), il en est de même de $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\ dt$. Ce qui démontre que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(u)\ du$ est convergente.

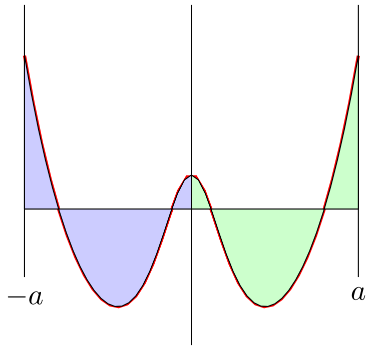
On procède de même si f est impaire.

À l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$, on obtient :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = \int_{a}^{0} -f(-u)\ du = \int_{a}^{0} f(u)\ du = -\int_{0}^{a} f(u)\ du$$

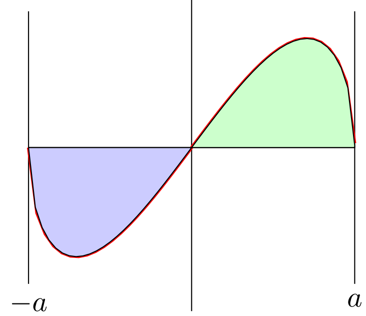
□

Représentation graphique. *(Cas d'une intégrale sur un segment)*



Cas d'une fonction paire

$+ \;=\; 2$



Cas d'une fonction impaire

$+ \;=\; 0$

Exemple

- Étude et nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ est continue sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
  De plus, elle est impaire car, pour tout $t \in\,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:
  $$f(-t) = \frac{-t}{\sqrt{2-(-t)^2}} = \frac{-t}{\sqrt{2-t^2}} = -f(t)$$

  2) On en déduit, sous réserve de convergence :
  $$\int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt = -\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$$
  Or on a démontré (*cf* précédent) que $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$ est convergente.
  Ainsi, $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$ est convergente.

  3) On en déduit que $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$ est convergente, de valeur :
  $$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt + \int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt = 0$$

- Étude et nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto t$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
  De plus, elle est impaire car, pour tout $t \in\,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:
  $$f(-t) = -t = -f(t)$$

  2) Soit $B \in [0, +\infty[$:
  $$\int_0^B t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^B = \frac{B^2}{2} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
  Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, dt$ n'est pas convergente.

  3) On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dt$ est divergente.
  On `NE` peut notamment `PAS` conclure que :
  $$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dt = \int_{-\infty}^{0} t\, dt + \int_{0}^{+\infty} t\, dt = 0}$$

Remarque

- Insistons sur le fait que le changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence de l'intégrale considérée (éventuellement, on émet une réserve de convergence que l'on lève ensuite).
- Ainsi, dans le dernier exemple, la parité de la fonction f n'est en fait d'aucune utilité : on ne peut effectuer le changement de variable puisque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, dt$ est divergente.

IV. Intégrales classiques

Théorème 7.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$

(critère de Riemann)

2) $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0}$

Démonstration.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $B \in [1, +\infty[$.

Si $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_1^B \frac{1}{t}\, dt = \left[\ \ln(|t|)\ \right]_1^B = \ln(B)$

Comme $\ln(B) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ diverge.

Si $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_1^B \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \int_1^B t^{-\alpha}\, dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^B = \frac{B^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$

Enfin si $-\alpha + 1 < 0$ alors $B^{-\alpha+1} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et si $-\alpha + 1 > 0$ alors $B^{-\alpha+1} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2) La fonction $f : t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $B \in [0, +\infty[$.

Si $\alpha = 0$: $\displaystyle\int_0^B 1\, dt = \left[\ t\ \right]_0^B = B$

Comme $B \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ diverge.

Si $\alpha \neq 0$: $\displaystyle\int_0^B e^{-\alpha t}\, dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \right]_0^B = -\left(\frac{e^{-\alpha B}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha B}}{\alpha}$

Enfin si $\alpha > 0$ alors $e^{-\alpha B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et si $\alpha < 0$ alors $e^{-\alpha B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Remarque

- La démonstration nous permet de connaître la valeur de ces intégrales (lorsqu'elles convergent) :

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1 \text{ alors } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha - 1}}$$

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 0 \text{ alors } \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt = \frac{1}{\alpha}}$$

- Par application de la relation de Chasles, on démontre :

$$\forall a > 0, \quad \boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\int_b^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0}$$

(il faut bien comprendre que les intégrales $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^b e^{-\alpha t}\, dt$ sont des intégrales sur un segment d'une fonction continue sur ce segment)

- Si X est une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors X admet pour densité :

$$f_X \ : \ \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt$ converge et de plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt \ = \ \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt \ = \ 1$$

ce qui permet de retrouver le résultat précédent.

Théorème 8.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1}$$

(critère de Riemann)

Démonstration.
La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$. Soit $A \in]0,1]$.

Si $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_A^1 \frac{1}{t}\,dt = [\ \ln(t)\ ]_A^1 = \ln(A)$

Comme $\ln(A) \underset{A\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha \neq 1$: $\displaystyle\int_A^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \int_A^1 t^{-\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_A^1 = \frac{1}{-\alpha+1} - \frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

Enfin si $-\alpha+1>0$ alors $A^{-\alpha+1} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 0$,
et si $-\alpha+1<0$ alors $A^{-\alpha+1} \underset{A\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. □

Remarque

- Par application de la relation de Chasles, on démontre :

$$\forall a > 0, \quad \boxed{\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1}$$

(il faut bien comprendre que les intégrales $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est une intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment)

Remarque

- Quelle est la nature de $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt$?

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est continue sur $[a,b[$.

2) Sous réserve de convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt$, posons le changement de variable $\boxed{u = b-t}$.

$u = b - t$ (donc $t = b - u$)

$\hookrightarrow du = -\,dt$ et $dt = -\,du$

- Si $t = a$ alors $u = b - a$
- Si $t = b$ alors $u = b - b = 0$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto b - u$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b-a]$. On obtient ainsi :

$$\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt = \int_{b-a}^0 \frac{1}{u^\alpha}\,(-du) = \int_0^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}\,du$$

3) Ainsi, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt$ est convergente ssi $\alpha < 1$.

- Quelle est la nature de $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\, dt$?

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est continue sur $]a, b]$.

2) Sous réserve de convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\, dt$, posons le changement de variable $\boxed{u = t - a}$.

$u = t - a$ (donc $t = u + a$)

$\hookrightarrow du = \ dt$ et $dt = du$

- Si $t = a$ alors $u = a - a = 0$
- Si $t = b$ alors $u = b - a$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto u + a$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b-a]$. On obtient ainsi :

$$\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\, dt \ = \ \int_0^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}\, du$$

3) Ainsi, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\, dt$ est convergente ssi $\alpha < 1$.

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{4}}}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t-1)^{\frac{1}{4}}}$ est continue sur $]1, 2]$.

2) Sous réserve de convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(t-a)^{\frac{1}{2}}}\, dt$, posons le changement de variable $\boxed{u = t - 1}$.

$u = t - 1$ (donc $t = u + 1$)

$\hookrightarrow du = \ dt$ et $dt = du$

- Si $t = 1$ alors $u = 1 - 1 = 0$
- Si $t = 2$ alors $u = 2 - 1 = 1$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto u + 1$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On obtient ainsi :

$$\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}\, dt \ = \ \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\, du$$

3) Or, par le critère de Riemann (au voisinage de 0), l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{4}}}\, du$ est convergente. Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{4}}}\, dt$ est convergente.

V. Propriétés des intégrales impropres

On écrit les propriétés pour les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ impropres en a. **Évidemment, on peut écrire des résultats similaires pour les autres cas**.

V.1. Relation de Chasles

Théorème 9.

Soient $-\infty \leqslant a < b$ (resp. $a < b \leqslant +\infty$).

Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $]a,b]$ (resp. $[a,b[$).

Supposons de plus que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Soit $c \in]a,b]$. Alors on a :

a) $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ *converge.*

b) *De plus, on a :* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt}$

Démonstration.

1) La fonction f est continue sur $]a,b]$.

2) Soient $A \in]a,b]$ et $c \in]a,b]$:

$$\begin{aligned} \int_A^b f(t)\,dt &= \int_A^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \\ \text{et donc} \quad \int_A^c f(t)\,dt &= \int_A^b f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\displaystyle\int_A^b f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque $A \to a$.

3) On en déduit que $\displaystyle\int_A^c f(t)\,dt$ admet aussi une limite finie lorsque $A \to a$ et, par passage à la limite :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt \qquad \square$$

Remarque

- Revenons sur l'hypothèse $c \in]a,b]$. Elle permet d'assurer que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ est bien définie. En effet, comme f est continue sur $]a,b]$ et $c \in]a,b]$, alors f est continue sur le segment $[c,b]$.
- On peut cependant énoncer le théorème sans cette hypothèse dans le cas où l'on sait que f est continue sur $]a,+\infty[$ et $b \in]a,+\infty[$. En effet, sous cette hypothèse, pour tout $c \in]a,+\infty[$, la fonction f est continue sur le segment $[c,b]$ (ou $[b,c]$ si $c > b$). Et on peut encore conclure :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt$$

V.2. Linéarité

Théorème 10.

Soient $-\infty \leqslant a < b$ (resp. $a < b \leqslant +\infty$).

Soit $f, g :]a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $]a,b]$ (resp. $[a,b[$).

Supposons que les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ convergent.

Alors :

a) $\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\,dt$ *converge.*

b) *De plus :* $\boxed{\displaystyle\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt}$

Démonstration.

1) La fonction f est continue sur $]a,b]$.

2) Soit $A \in]a,b]$. Par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_A^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\ dt \ = \ \lambda \int_A^b f(t)\ dt \ + \ \mu \int_A^b g(t)\ dt$$

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont convergentes donc $\displaystyle\int_A^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_A^b g(t)\ dt$ admettent chacune une limite finie lorsque $A \to a$. On en déduit que $\displaystyle\int_A^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque $A \to a$.

3) Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t)\ dt \ = \ \lambda \int_a^b f(t)\ dt \ + \ \mu \int_a^b g(t)\ dt$$

□

Remarque
Pour le Théorème 9 et Théorème 10, l'hypothèse $a < b$ n'est pas primordiale. On peut réécrire ces théorèmes sans cette hypothèse. Dans ce cas, il faut supposer que f est continue sur $]a,b]$ (si $a < b$) ou sur $[b,a[$ (si $a > b$). L'hypothèse $a < b$ est donc faite pour éviter de compliquer inutilement les écritures.

V.3. Techniques de majoration, minoration

V.3.a) Positivité

Théorème 11.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant aa < bb$).
Soit $f : [aa,bb[\to \mathbb{R}$ continue sur $[aa,bb[$ (resp. $]a,b]$).

Supposons de plus que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge.

Et supposons enfin : $\forall t \in [aa,bb[, \ \ f(t) \geqslant 0$.

a) *Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant :* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \ \geqslant \ 0}$

b) $\boxed{f \ > \ 0 \text{ sur } [aa,bb[\quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \ > \ 0}$

c) $\left.\begin{array}{l} \bullet \ \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0 \\ \bullet \ f \text{ continue et positive sur } [aa,bb[\end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f = 0 \text{ sur } [aa,bb[$

Démonstration.

a) ***1)*** La fonction f est continue sur $[a,b[$.

2) Soit $B \in [a,b[$. Par positivité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^B f(t)\ dt \geqslant 0$$

Comme $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque $B \to b$. On obtient le résultat souhaité en passant à la limite dans cette inégalité.

b) Si $f \neq 0$, alors $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt > 0$. Cependant, le passage à la limite dans cette inégalité ne permet pas de conclure (l'inégalité stricte devient large).

Soit $c \in \,]a, b[$ *(l'hypothèse $c > a$ est importante).*
La relation de Chasles fournit :

$$\int_a^b f(t)\ dt \quad = \quad \underbrace{\int_a^c f(t)\ dt}_{> 0} \quad + \quad \underbrace{\int_c^b f(t)\ dt}_{\geqslant 0} \quad > \quad 0$$

Le deuxième résultat est une application du point ***a)***.
La première intégrale est une intégrale sur le segment $[a, c]$ de la fonction f continue sur $[a, c]$. On applique le résultat issu du chapitre d'intégration sur un segment à la fonction $f > 0$ sur $[a, c]$.
(rappel : si F est une primitive de f alors $F' = f > 0$ sur $[aa, bb[$. Ainsi, F est strictement croissante et si $c < b$ alors $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt = F(b) - F(c) > 0$)

c) On procède par l'absurde. On suppose :
- × f continue, positive, d'intégrale nulle sur $[a, b[$,
- × $f \neq 0$ sur $[aa, bb[$: il existe donc $x_0 \in \ [a, b[$ tel que $f(x_0) > 0$.

La continuité de f assure alors que f est strictement positive dans un voisinage de x_0. Autrement dit, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \ [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \ \cap \ [a, b[, \ f(x) > 0$$

Ainsi :

$$\int_a^b f(t)\ dt \quad = \quad \underbrace{\int_a^{x_0-\delta} f(t)\ dt}_{\geqslant 0} \quad + \quad \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)\ dt}_{> 0} \quad + \quad \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{b} f(t)\ dt}_{\geqslant 0}$$

$$> \quad 0$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale. □

V.3.b) Croissance de l'intégrale

Théorème 12.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant aa < bb$).
Soit $f : [aa, bb[\to \mathbb{R}$ continue sur $[aa, bb[$ (resp. $]a, b]$).
Supposons de plus que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ <u>convergent</u>.
Et supposons enfin : $\forall t \in [aa, bb[, \ f(t) \leqslant g(t)$.
Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant \ \int_a^b g(t)\ dt}$$

Démonstration.
La fonction $g - f$ est :
- × continue sur $[aa, bb[$,
- × vérifie : $\forall t \in [aa, bb[, \ (g - f)(t) \geqslant 0$.

De plus, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b (g - f)(t)\ dt$ est convergente car $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont convergentes.
Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant $(b > a)$:

$$\int_a^b (g - f)(t)\ dt \geqslant 0$$

Enfin, par linéarité : $\displaystyle\int_a^b (g - f)(t)\ dt = \int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt.$ □

Remarque
Pour les propriétés de positivité et de majoration, l'hypothèse $a < b$ est primordiale. Il convient de la citer lors de l'utilisation de ces théorèmes.
On pourra adopter la rédaction suivante :

« les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant »

V.3.c) Inégalité de la moyenne (pour une intégrale sur un segment)

Théorème 13.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ (pas de borne infine pour ce résultat).

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$.

Les bornes d'intégration étant dans l'ordre croissant :

$$\boxed{(b-a) \min_{t\in[a,b]} (f(t)) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant (b-a) \max_{t\in[a,b]} (f(t))}$$

Démonstration.

La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Ainsi, $\min\limits_{t\in[a,b]} (f(t))$ et $\max\limits_{t\in[a,b]} (f(t))$ existent bien.

Soit $t \in [a,b]$. On a :

$$\min_{t\in[a,b]} (f(t)) \leqslant f(t) \leqslant \max_{t\in[a,b]} (f(t))$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($b \geqslant a$), on obtient :

$$\int_a^b \min_{t\in[a,b]} (f(t))\, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b \max_{t\in[a,b]} (f(t))\, dt$$

$$\text{ainsi } (b-a) \min_{t\in[a,b]} (f(t)) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant (b-a) \max_{t\in[a,b]} (f(t))$$ □

Remarque

- La démonstration de ce théorème met en avant une propriété importante : toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe forcément $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
  × $f(t_1) = \min\limits_{t\in[a,b]} (f(t))$,
  × $f(t_2) = \max\limits_{t\in[a,b]} (f(t))$.
- De ces 3 propriétés de majoration / minoration, il faut retenir la méthode suivante. Pour pouvoir comparer des intégrales :
  1) on commence `TOUJOURS` par comparer les intégrandes (on écrit tout d'abord une inégalité sur les fonctions),
  2) on conclut par la croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant.

  Si l'on travaille sur des intégrales impropres, il faut avoir démontré au préalable la convergence des intégrales.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \,\mathrm{e}^{-x}\, dx$.

1) Montrer que pour tout n, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

2) En déduire la limite de (I_n).

Démonstration.

1) La fonction $x \mapsto x^n \,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0,1]$.
Pour tout $x \in [0,1]$: $0 \leqslant x^n \,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$.
Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($1 \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant \underbrace{\int_0^1 x^n \,\mathrm{e}^{-x}\, dx}_{= I_n} \leqslant \underbrace{\int_0^1 x^n\, dx}_{= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1} = \frac{1}{n+1}$$

2) Comme :
× $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
× $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

alors, par théorème d'encadrement, $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

VI. Le cas des fonctions continues positives

VI.1. Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue positive

VI.1.a) Cas d'un intégrale impropre en b

Théorème 14.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b[$.

Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.

Supposons de plus : $\forall x \in [a, b[,\ f(x) \geqslant 0$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ est majorée}}$

2) *Si F est non majorée, $\lim\limits_{x \to b} F(x) = +\infty$.*

Démonstration.

- Par définition, F est la primitive de f sur $[a, b[$ qui s'annule en c.
  On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$. De plus :
  $$\forall x \in [a, b[,\ F'(x) = f(x) \geqslant 0$$
  Ainsi, F est croissante sur $[a, b[$.
- En vertu du théorème de la limite monotone, F admet donc une limite éventuellement infinie (à gauche) en b. De plus :
  × cette limite est finie si F est majorée.
  × cette limite est $+\infty$ si F non majorée. □

VI.1.b) Cas d'un intégrale impropre en a

Théorème 15.

Soient $-\infty \leqslant a < b$ et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b]$.

Notons $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\, dt$.

Supposons de plus : $\forall x \in]a, b],\ f(x) \geqslant 0$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad G \text{ est majorée}}$

2) *Si G est non majorée, $\lim\limits_{x \to a} G(x) = +\infty$.*

Démonstration.

- La fonction f étant continue sur $]a, b]$, elle admet une primitive F sur $]a, b]$.
  Alors, pour tout $x \in]a, b]$:
  $$\int_x^b f(t)\, dt = [\ F(t)\ ]_x^b = F(b) - F(x)$$
  La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ et :
  $$\forall x \in [a, b[,\ G'(x) = -F'(x) = -f(x) \leqslant 0$$
  Ainsi, G est décroissante sur $]a, b]$.
- En vertu du théorème de la limite monotone, G admet donc une limite éventuellement infinie (à droite) en a. De plus :
  × cette limite est finie si G est majorée.
  (oui, la condition est bien G majorée et pas minorée !)
  × cette limite est $+\infty$ si G non majorée. □

VI.1.c) Cas d'une intégrale doublement impropre

Considérons $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$.
On se ramène au cas précédent en passant à la définition :

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ converge} \Leftrightarrow \exists c \in]a, b[,\ \int_a^c f(t)\, dt \text{ et } \int_c^b f(t)\, dt \text{ convergent}$$

VI.2. Règles de comparaison

VI.2.a) Comparaison par inégalité

Théorème 16.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Supposons de plus : $\forall x \in [a, b[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

1) *Alors on a :*

a. $$\boxed{\int_a^b g(t)\, dt \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\, dt \text{ converge}}$$

b. $$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(t)\, dt \text{ diverge}}$$

2) *De plus, dans le cas de la convergence, on a :*

$$\boxed{0 \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt}$$

Démonstration.

1) Soit $x \in [a, b[$. Comme :

- $\times$ f et g sont continues sur $[a, x]$,
- $\times$ $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, x]$,
- $\times$ les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant,

on conclut (technique de majoration du chapitre intégration sur un segment) :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_a^x g(t)\, dt \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & \leqslant & F(x) & \leqslant & G(x) \end{array}$$

a. Comme $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ converge, la propriété précédente énonce que G est majorée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b[$: $G(x) \leqslant M$.
Et donc, pour tout $x \in [a, b[$, on a :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant G(x) \leqslant M$$

Ainsi, F est elle aussi majorée par M, ce qui démontre que $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ converge.

b. Dans ce cas, $F(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$ et ainsi $G(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$.

2) Inégalité obtenue par passage à la limite dans l'inégalité précédente. □

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Elle est de plus **positive** sur $[1, +\infty[$.

2) $\times$ Pour tout $t \in [1, +\infty[$: $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

$\times$ Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$ est convergente.

Exercice

Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t + \sqrt{t}}\, dt$ ***b)*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$ ***c)*** $\displaystyle\int_2^{+\infty} t^2 \ln\left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right) dt$

VI.2.b) Comparaison par négligeabilité

Théorème 17.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions :

$\times$ *continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).*

$\times$ *positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).*

Supposons de plus : $f(t) = \underset{t \to b}{o}(g(t))$ (resp. $f(t) = \underset{t \to a}{o}(g(t))$).

a. $$\boxed{\int_a^b g(t)\, dt \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\, dt \text{ converge}}$$

b. $$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(t)\, dt \text{ diverge}}$$

Démonstration.

- Comme $f(t) = \underset{t \to b}{o}(g(t))$, on a : $\lim\limits_{t \to b} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 0$.

  Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

  $$\forall t \in \ [b - \delta, b + \delta] \ \cap \ [a, b[, \ \left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| \leqslant \varepsilon$$

  Choisissons $\varepsilon = 1$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in \ [b - \delta, b]$:

  $$|f(t)| \leqslant |g(t)| \quad \text{ et donc } \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

- En utilisant le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, on en conclut :

  $$\int_{b-\delta}^b g(t)\, dt \text{ converge} \ \Rightarrow \ \int_{b-\delta}^b f(t)\, dt \text{ converge}$$

  Il suffit alors de remarquer que $\displaystyle\int_a^b \ldots\, dt$ converge ssi $\displaystyle\int_{b-\delta}^b \ldots\, dt$ converge pour conclure. □

Exemple

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  Elle est plus **positive** sur $[0, +\infty[$.

  2) $\times$ $\mathrm{e}^{-t^2} = \underset{t \to +\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$

  $\times$ Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ est convergente.

  Ainsi, par le théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est convergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$.
  Elle est plus **positive** sur $[2, +\infty[$.

  2) $\times$ $\dfrac{1}{t} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$.

  (comprendre que $\dfrac{1}{\ln(t)}$ est grand devant $\dfrac{1}{t}$)

  $\times$ Or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est divergente.

  Ainsi, par le théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$ est divergente.

VI.2.c) Comparaison par équivalence

Théorème 18.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions :

× *continues sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).*

× *positives sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).*

Supposons de plus : $f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)$ (resp. $f(t) \underset{t \to a}{\sim} g(t)$).

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ sont de même nature.

Démonstration.

- Comme $f(t) \underset{t \to b}{\sim} (g(t))$, on a : $\displaystyle\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$.

  Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in \ [b - \delta, b + \delta] \ \cap \ [a, b[, \ \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon$$

  Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in \ [b - \delta, b]$:

$$\left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < \frac{1}{2} \quad \text{et donc} \quad 0 \leqslant \frac{1}{2}\, g(t) \leqslant f(t) \leqslant \frac{3}{2}\, g(t)$$

- En utilisant le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, on en conclut :

$$\int_{b-\delta}^b g(t)\, dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{b-\delta}^b f(t)\, dt \text{ converge}$$

  Il suffit alors de remarquer que $\displaystyle\int_a^b \dots\, dt$ converge ssi $\displaystyle\int_{b-\delta}^b \dots\, dt$ converge pour conclure. □

Exemple

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}$ est continue sur $]0, 1]$.
  Elle est plus **positive** sur $]0, 1]$.

  2) × $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ $(\geqslant 0)$

  × Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\, dt$ est divergente.

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est divergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4t^2 + 2t - 1}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
  Elle est plus **positive** sur $[1, +\infty[$.

  2) × $\dfrac{1}{4t^2 + 2t - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\,t^2}$ $(\geqslant 0)$

  × Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4\,t^2}\, dt$ est convergente d'après le critère de Riemann.

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4t^2 + 2t - 1}\, dt$ est convergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\ dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$.
  Elle est plus **positive** sur $]0,1]$.

  2) × $\dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ $(\geqslant 0)$

  × Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt$ est convergente d'après le critère de Riemann.
  Ainsi, par le théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\ dt$ est convergente.

VI.3. Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue négative

- Dans le cas où la fonction f considérée est continue et négative sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$), on se ramène aux cas précédents en considérant la fonction $-f$ qui est positive sur cet intervalle.
- En réalité, les théorèmes précédents auraient pu être énoncés dans le cas de fonctions continues négatives. La bonne hypothèse est donc celle de fonction continue et **de signe constant** sur l'intervalle considéré.

VI.4. Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue de signe quelconque

VI.4.a) Notion convergence absolue

Dans le cas où f est de signe quelconque, on peut se ramener au cas de l'étude des fonctions positives.

Définition

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$, resp. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).
Soient $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$).

- On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b \mid f(t) \mid\ dt$ converge.

Théorème 19.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soient $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$).

$$\int_a^b f(t)\ dt \text{ est absolument convergente} \Rightarrow \int_a^b f(t)\ dt \text{ est convergente}$$

Démonstration.
Notons $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$.
× $f^+ : x \mapsto \max(f(x),0)$ est la partie positive de f.
× $f^- : x \mapsto -\min(f(x),0) = \max(-f(x),0)$ est la partie négative de f.
Supposons $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ absolument convergente.

- × On a : $\forall t \in [a, b[,\ \ 0 \leqslant f^+(t) \leqslant |f(t)|$.

  × Or $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

  Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f^+(t)\, dt$ est aussi convergente.
- × On a : $\forall t \in [a, b[,\ \ 0 \leqslant f^-(t) \leqslant |f(t)|$.

  × Or $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

  Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f^-(t)\, dt$ est aussi convergente.

Enfin, on remarque :

$$f = f^+ - f^-$$

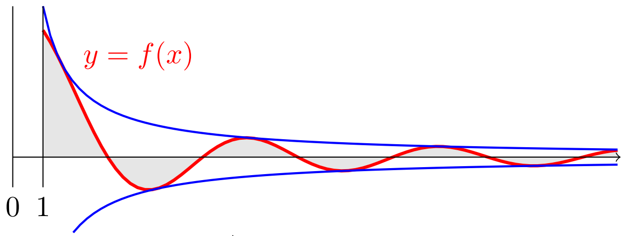
On en conclut, par linéarité, que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente. □

Remarque
Ce résultat n'est pas une équivalence : il existe des intégrales impropres convergentes mais non absolument convergentes. Dans ce cas, on parle parfois de **semi-convergence**.

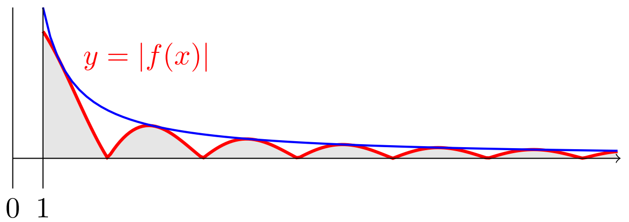
Représentation graphique d'une intégrale semi-convergente.

- Pour construire un exemple d'intégrale semi-convergente, l'idée est de choisir une fonction successivement positive puis négative de sorte qu'un phénomène de compensation s'opère :
  × sur un intervalle où f est positive, l'aire est comptée positivement.
  × sur l'intervalle « suivant », f est négative, l'aire est comptée négativement et réduit l'aire précédente.

  Lorsque l'on calcule l'intégrale sur l'union de ces deux intervalles,
- L'exemple le plus classique fait intervenir une fonction trigonométrique. Nous en donnons la représentation graphique sans développer plus avant.



L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.



L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(t)|\, dt$ n'est pas convergente.

VI.4.b) Inégalité triangulaire

Théorème 20.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Supposons de plus que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est absolument convergente.

1) *Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente.*

2) $\boxed{\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |\, f(t)\, |\, dt}$

Démonstration.

1) C'est le résultat du théorème 19.

2) La fonction f est continue sur $[a, b[$.
Soit $x \in [a, b[$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire des intégrales de fonctions continues sur un segment ($[a, x]$ ici) :

$$|F(x)| = \left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^x |\, f(t)\, |\, dt$$

La quantité de droite converge, par hypothèse, vers $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$.
D'autre part (théorème de composition des limites), on a :

$$\lim_{x\to b} |F(x)| = |\lim_{x\to b} F(x)| = \left| \int_a^b f(t)\, dt \right|$$

*(on rappelle que F admet une limite finie en $+\infty$ d'après **1)**)*
L'inégalité souhaitée est donc vérifiée par passage à la limite dans l'inégalité précédente. □

VII. Comparaison séries / intégrales

Théorème 21.

On considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[0, +\infty[$.

On suppose de plus que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

1) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^k f(t)\, dt \leqslant f(k-1)}$

2) *On en déduit, par sommation :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{S_n - f(0) = \sum_{k=1}^n f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^n f(k-1) = S_{n-1}}$$

(prudence lors de la sommation : pour quels entiers k peut-on sommer ?)

3) *Si, de plus, f est positive, on a :*

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \text{L'intégrale impropre } \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge}}$$

(la série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature)

Démonstration.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $t \in [k-1, k]$.

  Comme $k - 1 \leqslant t \leqslant k$

  alors $f(k-1) \geqslant f(t) \geqslant f(k)$ *(par décroissance de la fonction f sur $[0, +\infty[$)*

- La fonction f est continue sur le **segment** $[k-1, k]$.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{k-1}^k f(t)\, dt$ est bien définie.

De plus, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leqslant k$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\ dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big(k-(k-1)\big)\ f(k-1) & & & & \big(k-(k-1)\big)\ f(k) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \ \leqslant\ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \ \leqslant\ f(k-1)}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient, par sommation des inégalités précédentes :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k-1) \\ & & \shortparallel & & \\ & & \displaystyle\int_{0}^{n} f(t)\ dt & & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \end{array}$$

Enfin : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$.

3) La fonction f est continue et positive sur $[0,+\infty[$.
Ainsi, la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$ équivaut au caractère majoré de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\ dt$.

($\Leftarrow$) Supposons que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.

- On en déduit que $F : x \mapsto \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\ dt$ est majorée.
  Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) \leqslant M$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de ce qui précède : $S_n - f(0) \leqslant F(n) \leqslant M$ et donc :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant (f(0)+M)$$
  La suite (S_n) est donc majorée. Elle est de plus croissante (car la série $\sum f(n)$ est à termes positifs).
  Ainsi, (S_n) est convergente.

($\Rightarrow$) Supposons que la série $\sum f(n)$ est convergente.

- Alors la suite (S_n) est convergente. Elle est donc aussi majorée.
  Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant M$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de ce qui précède : $F(n) \leqslant S_{n-1} \leqslant M$.
  Enfin, comme la fonction F est croissante :
  $$\forall x \in [0,+\infty[,\ F(x) \leqslant F(\lceil x \rceil) \leqslant S_{\lceil x \rceil -1} \leqslant M$$
  *(on rappelle que $\lceil x \rceil$ est l'**entier** directement supérieur à x)*
  Ainsi, la fonction F est majorée, ce qui démontre que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente. □

Exercice *(d'après* `EML 1992`*)*
On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\,]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2) Montrer que : $\forall k \geqslant 3$, on a : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)$.

3) ***a.*** Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ S_n - \dfrac{1}{2\ln 2} \leqslant \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt \leqslant S_n - \dfrac{1}{n \ln n}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}$$

c. Établir que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$.

VIII. Somme de Riemann, méthode des rectangles (RAPPEL de 1ère année)

VIII.1. Définition

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ une subdivision finie de $[a,b]$.

- On appelle **somme de Riemann** toute somme s'écrivant :

$$\boxed{R_n \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \ f(\xi_k)}$$

où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, ξ_k est un élément choisi dans $[x_k, x_{k+1}]$.

Remarque

On considère en particulier des sommes de Riemann définies sur des subdivisions régulières *i.e.* telles que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$.

- En prenant pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = x_k$.

$$\boxed{S_n \ = \ \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right)}$$

- En prenant pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = x_{k+1}$.

$$\boxed{T_n \ = \ \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right)}$$

- En prenant pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

$$\boxed{M_n \ = \ \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}\ \frac{b-a}{n}\right)}$$

Remarque

Les sommes de Riemann dépendent des paramètres a, b et f. En toute rigueur, il faudrait donc écrire $S_n(a,b,f)$. On se permettra d'alléger cette notation pour ne conserver que S_n en précisant par ailleurs ces paramètres.

VIII.2. Méthode des rectangles

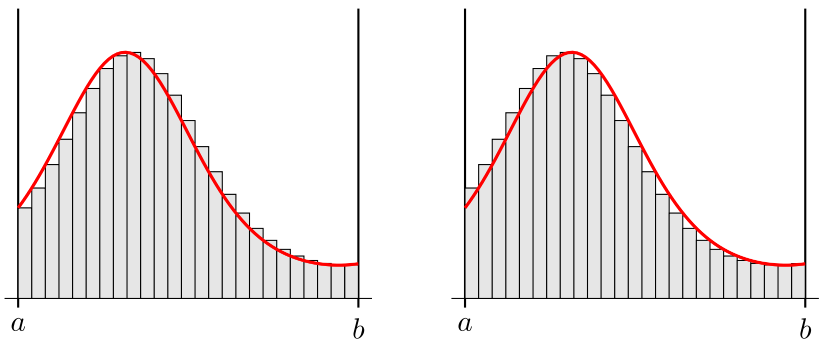
VIII.2.a) Définition

Définition

La méthode des rectangles est une méthode d'analyse numérique consistant à approcher le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.

- On considère une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
- On approche $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt$ par l'aire d'un rectangle de côté $[x_k, x_{k+1}]$ et s'appuyant sur la courbe $\mathscr{C}_f$.
- On approche alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ par la somme de toutes les aires de rectangles ainsi définis.

Autrement dit, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est approchée par une somme de Riemann.



Somme de Riemann S_n — Somme de Riemann T_n

Découpage avec $n = 25$

VIII.2.b) Convergence de la méthode

Théorème 22. *Cas des fonctions continues*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$.

- *Convergence de la somme (S_n).*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt}$$

- *Convergence de la somme (T_n).*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt}$$

- *Convergence de la somme (M_n).*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt}$$

Démonstration.
Admis dans le cas des fonctions continues. □

Cas particulier

- Les exercices sur les sommes de Riemann se traitent en faisant apparaître le cas particulier : $a = 0$, $b = 1$. On a alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

- Illustrons ce procédé par un énoncé classique.
  Démontrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}\right)$ est convergente et calculer sa limite.

L'énoncé du cas particulier nous invite à faire apparaître la quantité $\dfrac{k}{n}$ dans la somme finie. Or on a :

$$n + k = n\left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

Ainsi : $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$.
On en déduit que la suite de l'énoncé est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = \big[\ \ln(|1+t|)\ \big]_0^1 = \ln 2 - \cancel{\ln 1}$$

VIII.2.c) Vitesse de convergence dans le cas de fonctions $\mathcal{C}^1$ (CULTURE)

Théorème 23. *(Cas des fonctions $\mathcal{C}^1$ - vitesse de convergence)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Notons $M_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Alors on a : $\boxed{\left|\int_a^b f(t)\ dt - S_n\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2n}\ M_1}$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que M_1 est bien défini. En effet, comme f est $\mathcal{C}^1$, f' est continue. Sur le segment $[a,b]$ elle est donc bornée et atteint ses bornes, ce qui démontre l'existence de $M_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Par la relation de Chasles, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt$.

D'autre part, par définition, on a : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\ f(x_k)$.

On remarque de plus que : $(x_{k+1} - x_k)\ f(x_k) = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ dt$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(t)\ dt - S_n \right| \\
= &\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ dt \right| \\
= &\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt \right| \\
\leqslant &\sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt \right| && \textit{(inégalité triangulaire sur les réels)} \\
\leqslant &\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ f(t) - f(x_k)\ |\ dt && \textit{(inégalité triangulaire sur les intégrales)}
\end{aligned}$$

Or, par le théorème des accroissements finis, on a que :

$$|\ f(t) - f(x_k)\ |\ \leqslant\ M_1\ |\ t - x_k\ |$$

Ainsi : $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ f(t) - f(x_k)\ |\ dt\ \leqslant\ M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ t - x_k\ |\ dt$

Et comme $t \geqslant x_k$ pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ t - x_k\ |\ dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\ dt &= \left[\frac{1}{2}\ (t - x_k)^2 \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&= \frac{1}{2}\ (x_{k+1} - x_k)^2
\end{aligned}$$

Au final, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)\ dt - S_n \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2}\ (x_{k+1} - x_k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \cancel{n} \frac{M_1}{2}\ \frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}} = \frac{(b-a)^2}{2n}\ M_1
\end{aligned}$$

□

Remarque

- Ce théorème est en fait valable pour toute somme de Riemann (notamment (T_n) et (M_n)). La démonstration est similaire à remplacement de x_k par ξ_k près avec :
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - \xi_k|\ dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - x_k|\ dt$$
- En fait si f est $\mathcal{C}^2$, on a même un théorème plus précis pour (M_n) montrant que la convergence est plus rapide dans ce cas.
$$\boxed{\left| \int_a^b f(t)\ dt - M_n \right|\ \leqslant\ \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|}$$

Application.
Grâce à ce théorème, on peut calculer une approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ à ε près par un calcul de S_n.

- Trouver un entier n_0 tel que : $\dfrac{(b-a)^2}{2n_0} M_1\ \leqslant\ \varepsilon$
  Il suffit de prendre $n_0 = \left\lceil \dfrac{(b-a)^2}{2\varepsilon} M_1 \right\rceil$
- S_{n_0} est alors une approximation à ε près de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$:
$$\left| \int_a^b f(t)\ dt - S_{n_0} \right|\ \leqslant\ \frac{(b-a)^2}{2n_0}\ M_1\ \leqslant\ \varepsilon$$

$\hookrightarrow$ *cf* TP d'informatique !