Feuille d'exercices n°8 : Intégration

Techniques de calcul d'intégrales

Exercice 1 (☆)
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^2 t\,\mathrm{e}^{2t}\,dt$

b) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2t+1}\,dt$

f) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,dx$

Exercice 2 (★)*(d'après* `ECRICOME 1998`*)*
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
A l'aide d'un changement de variables, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ln(1+\mathrm{e}^t)\,dt = g\left(\mathrm{e}^x\right) + 2\ln 2$$

Exercice 3 (★)
Déterminer la nature des intégrales suivantes, et donner leur valeur en cas de convergence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ ***2.*** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\,dx$ ***3.*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

4. $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ puis $\displaystyle J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx.$

Exercice 4 (★★★)
Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle I_n(x) = \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}dt.$

2. Étudier suivant les valeurs de x, la convergence de la série de terme général $I_n(x)$.

3. On pose $\displaystyle J_n(x) = \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\frac{1-\mathrm{e}^{-nt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}dt.$

a) Justifier la convergence de l'intégrale $J_n(x)$.
On distinguera les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = J_n(x)$.

4. On suppose ici que $0 < x < 1$.

a) Étudier la fonction g définie sur $[-\ln(x), +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$.

b) Calculer $\displaystyle\int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,dt$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

Changement de variable affine

Exercice 5 (★★)*(d'après* `EDHEC 2008`*)*
Pour tout couple d'entiers naturels (p,q), on pose $\displaystyle B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$.

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que : $B(p,q) = B(q,p)$.

2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir la relation : $B(p,q) = \dfrac{p}{q+1}\,B(p-1,q+1)$.

3. Calculer, pour tout entier naturel n, $B(0,n)$.

4. En déduire la valeur de $B(p,q)$, pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

5. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{p+k+1}$, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

(☆): application directe du cours, (★): pas de difficulté majeure, (★★): plus difficile, (★★★): costaud

Exercice 6 (★)
Soient a et b deux réels strictement positifs et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge.

1. Montrer que, pour $\alpha > 0$, on a : $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = \int_{b\alpha}^{a\alpha} \frac{f(t)}{t} dt.$

2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx$ existe et vaut $f(0) \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

3. Montrer l'existence $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\, dx$ et donner sa valeur.

4. Déduire de la question précédente la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$.

Intégrale fonction de ses bornes

Exercice 7 (★★)
On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt$.

1. *a)* Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.
Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et calculer f'.

b) En déduire $f(x)$ pour tout $x \in\,]0, +\infty[$.

2. Retrouver ce résultat en posant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 8 (★★)
On considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt$.

1. Montrer que H est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $H'(x)$, pour tout $x \geqslant 0$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xH(x) = 0$.

4. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)\, dt$ est convergente et calculer sa valeur en fonction de $H(0)$.

Sommes de Riemann

Exercice 9 (★)
Calculer les limites des suites dont on donne le terme général ci-dessous.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^3}{n^4}$

2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3 + k^3}$

3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$

4. $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+k)(\ln(2n+k) - \ln(n))}$

5. $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

6. $t_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 10 (★★)
Étudions l'erreur commise lorsque l'on approche une intégrale par une somme de Riemann.
On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Justifier l'existence d'un réel M tel que $\forall x \in [0, 1]\,,\ |f'(x)| \leqslant M$.
Déterminer un tel réel M.

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)\, dt \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| dt$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{n}$$

4. Écrire, en **Scilab**, un programme qui calcule et affiche une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ à `epsilon` près, le réel `epsilon` étant entré au clavier par l'utilisateur.

Intégrales définies par une relation de récurrence

Exercice 11 (★★)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

1. Montrer que I_n existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. *a)* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}\, I_{n-1}$.

b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n}\, I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}\, I_n$.

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$.

5. *a)* Calculer I_n en fonction de n.

b) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e} \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) Déterminer la valeur de α.

Exercice 12 (★)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, u^n\, du$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 (t\, \ln(t))^n\ dt$.

1. Montrer que J_0 est convergente, et calculer sa valeur.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n existe.
À l'aide d'une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1}, déterminer la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

4. Soit $x \in\,]0,1[$. En posant $u = -(n+1)\ln(t)$, calculer $\displaystyle\int_x^1 (t\ln(t))^n\ dt$.

5. En déduire la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n\ dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ et $u_n = \sqrt{n}\, I_n$.

On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \sqrt{2\pi}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n est convergente.
Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et étudier sa convergence.

3. Calculer I_n, pour tout $n \geqslant 1$.

4. *a)* Montrer que, pour tout réel x : $\ln(1+x^2) \leqslant x^2$.

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$: $I_n \geqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\ dx$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire une minoration de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\dbinom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha\, 4^n}{\sqrt{n}}$.

Lien séries intégrales

Exercice 14 (★)

Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$.

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\ dt$?

2. Déterminer le tableau de variations de f.

3. En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$.

4. Généraliser ce résultat en déterminant la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^\beta(n)}$ où $\beta > 1$.

Exercice 15 (★★)*(d'après* `EDHEC 2003`*)*

On note f la fonction définie, pour tout $x > 0$, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. a) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\ dx$. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

b) En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. a) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\, dx \leqslant f(k)$.

b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Critères de comparaison (fonctions continues positives)

Exercice 16 (★★)*(d'après* `ESC 2002`*)*

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f_n(x) = \frac{n \ln x}{n + 1 + nx^2}$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par :

$$\forall x > 0,\ h(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$$

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.

2. a) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\ dx$ est convergente.

Dans toute la suite de l'exercice, on note K l'intégrale impropre :

$$K = \int_1^{+\infty} h(x)\ dx$$

3. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x)\ dx$ est convergente.

b) En posant $u = \dfrac{1}{x}$, montrer que : $K = -\displaystyle\int_0^1 h(u)\, du$.

c) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\, dx$ converge et est égale à $2K$.

d) En déduire également que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\, dx$ converge et vaut 0.

4. a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$: $h(x) - f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n + 1 + nx^2}$.

c) En déduire successivement : $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant \frac{K}{n+1}$,

et : $-\dfrac{K}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^1 (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant 0$.

d) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = 0$.

5. Calculer, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ dx$?

Exercice 17 (★★)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

$\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier les variations de f et déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. Montrer que l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes est finie.

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\, dx$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.

c) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = f(x)e^{-nx} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x\, e^{-kx}$.

En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

4. On pose pour tout $u > 0$, $J_u = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} - 1}\, dx$ et $K_u = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{ux} + 1}\, dx$.

a) Montrer que, pour tout $u > 0$, les intégrales J_u et K_u sont convergentes.

b) Calculer, pour tout $u > 0$, J_u et K_u en fonction de J_1 et K_1.

c) Etablir que $J_1 - K_1 = 2J_2$.

d) Déduire des questions précédentes une relation simple entre J_1 et K_1, puis entre J_u et K_u.

Exercice 18 (★)

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\, dt$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, e^{-x}\, dx$ *(avec $n \in \mathbb{N}$)*

d) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}\, dx$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\, dx$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$ *(avec $n \in \mathbb{N}$)*

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^n}\, dt$ *(avec $n \in \mathbb{N}$)*

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(1-e^{-t}\right)^n\, dt$ *(avec $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$)*

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$ *(avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$)*

2. Déterminer un équivalent de $\dfrac{x^3 e^x}{(1+e^x)^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\, dx$.

Intégrales à paramètre

Exercice 19 (★★)

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.

1. Vérifier que pour $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

2. Donner le sens de variation de f.
(indication : pour tout $0 < a < b$, montrer que $f(b) < f(a)$)

3. En utilisant la question *1*, déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. *a)* Démontrer que : $\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) \leqslant 2\ f(x)$.

b) Démontrer que : $\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) \geqslant 2\ f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 20 (★★★)
Étude de la fonction Γ

On rappelle que l'intérale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est convergente et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}.$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est convergente, et calculer sa valeur.

2. ***a)*** Déterminer, pour tout réel x, la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$, pour tout réel x.

c) Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente.

d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma : x \mapsto \int_{0}^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

est définie sur $]0, +\infty[$.

3. ***a)*** Calculer $\Gamma(1)$.

b) Etablir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, pour tout réel strictement postif x.
En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Démontrer que $\quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$

En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad \Gamma\left(\dfrac{2p+1}{2}\right) = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,p!}\sqrt{\pi}.$

Exercice 21 (★★)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Quel est le sens de variation de f ?

3. Soient a, b deux réels tels que $0 < a \leqslant b$, montrer que :

$$0 \leqslant f(a) - f(b) \leqslant \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

En déduire que f est continue.

4. Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 22 (★★)

Soit f la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,dt.$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f est monotone.

3. Montrer que $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.

4. ***a)*** En utilisant les questions *2* et *3*, déterminer la limite de f en 0.

b) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
(on pourra démontrer que : $\forall x > 0$, $f(x) + f(x+1) \leqslant 2\ f(x)$ et $f(x) + f(x+1) \geqslant 2\ f(x+1)$)

5. Calculer $f(1)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Exprimer $f(n+1)$ et $f\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

6. En déduire que les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ sont convergentes et calculer leur somme respective.

Exercice 23 (★★)

On pose, quand l'intégrale converge, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est $]0,+\infty[$.

2. Montrer que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

3. ***a)*** Pour $x>0$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)}$.

b) Pour $x>0$ et $t \geqslant 1$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis calculer $g(x)$.

c) En déduire que, pour tout $x>0$: $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{x}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. ***a)*** Montrer que : $\forall x>0,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

b) En déduire la limite et un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Autre

Exercice 24 (★★)

Soit f définie par : $f(t) = \dfrac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

1. Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$.

Calculer I à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

2. Montrer que, pour tout $x>0$, $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

En déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction ε tels que :

$$\forall x>0,\ F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$$

On précisera les valeurs de a et b.

3. Montrer que $G(x) = \ln x + \displaystyle\int_1^x F(t)\,dt$ possède une limite finie en $+\infty$.

Intégrale faussement impropre

Exercice 25 (★★)

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x}\ dx$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1-x}\ dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln x\ dx$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que l'intégrale I_n est convergente.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $-1 \leqslant \dfrac{x\ln x}{1-x} \leqslant 0$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant I_n \leqslant 0$, puis la limite de I_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer sa valeur.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} J_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} + I_{n+1}$.

6. Écrire un programme **Scilab** qui affiche une valeur de I à 10^{-2} près.