Étude d'intégrales : résumé des méthodes

Dans les exercices, les intégrales se présentent sous différentes formes.
Réussir à analyser les objets considérés permet de savoir quelle méthode appliquer, ce qui est illustré dans cette fiche.

I. Intégrales $\int_a^b f(t)\ dt$ où f continue sur $[a,b]$

La fonction f étant continue sur **le segment** $[a,b]$, l'intégrale considérée est bien définie. On peut alors appliquer les techniques de cacul suivantes.

1. **Intégration « à vue »** : on trouve une primitive F de f, et :

$$\int_a^b f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. À défaut : **intégration par parties**.

La fonction $f : t \mapsto t\ \ln(t)$ est continue sur le **segment** $[1,2]$.
On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = t & v(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$. On obtient :

$$\int_1^2 t\ \ln(t)\ dt \ = \ \left[\ \frac{t^2}{2}\ \ln(t)\ \right]_1^2 \ - \ \frac{1}{2}\int_1^2 t\ dt \ = \ \ldots$$

3. À défaut : **intégration par changement de variable**.

Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = e^t}$

$$\left|\begin{array}{l} u = e^t \text{ (donc } t = \ln(u)) \\ \hookrightarrow du = e^t\ dt \quad \text{ et } \quad dt = \dfrac{1}{e^t}\,du = \dfrac{1}{u}\,du \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = e^1 \\ \bullet\ t = 2 \ \Rightarrow\ u = e^2 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[e, e^2]$.
On obtient :

$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} \ = \ \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u}\,du \ = \ \ldots$$

II. Suites (I_n) où $I_n = \int_a^b f_n(t)\ dt$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas d'une intégrale généralisée (f_n continue sur $[a,b[$ par exemple), la première question est généralement de démontrer que I_n est convergente *(à ne surtout pas confondre avec le sens de variation de (I_n) !)*.
Généralement, on cherche un équivalent de $f_n(t)$ au voisinage de b et on conclut par théorème de comparaison.

Considérons maintenant le cas où, f_n continue sur **le segment** $[a,b]$.

1. **Sens de variation** : on calcule :

$$I_{n+1} - I_n = \int_a^b f_{n+1}(t)\ dt - \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b (f_{n+1}(t) - f_n(t))\ dt$$

puis on étudie le signe de l'intégrale obtenue ce qui permet de conclure quant à la monotonie de cette suite (I_n).
Plus précisément, on procède en 2 étapes :

× on détermine le signe sur $[a,b]$ de $(f_{n+1}(t) - f_n(t))$,

× on conclut par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant).

2. **Convergence de** (I_n) : on démontre le caractère majoré / minoré afin de pouvoir utiliser le théorème de convergence monotone.

3. **Recherche de la limite** : on cherche à majorer/minorer/encadrer l'intégrale par une/des intégrales calculables en se débarrassant de ce qui « gêne », mais en conservant ce qui « bouge » (donc dépend de n), puis on utilise le théorème d'encadrement.

Classiquement, on procède en 2 étapes :

× on écrit : $\forall t \in [a,b]$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant g_n(t)$.

× on conclut par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant).

$$0 \leqslant \int_a^b f_n(t)\ dt \leqslant \int_a^b g_n(t)\ dt = \ldots \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

où g_n est une fonction continue sur le **segment** $[a,b]$ dont on peut aisément déterminer l'intégrale sur $[a,b]$.

4. **Calcul de** I_n : uniquement s'il est demandé ! Il se fait le plus souvent à partir d'une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n (ou I_n et I_{n-1}) obtenue la plupart du temps à l'aide d'une intégration par parties.

III. Intégrale fonction de sa borne supérieure

Il s'agit d'étudier $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ où f est continue sur un intervalle I, a est un élément fixé de I, et x est un élément quelconque de I.

1. Si on sait son cours : H est la primitive de f sur I qui s'annule en a. Ainsi, H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\forall x \in I$, $H'(x) = f(x)$.

2. Sinon (méthode plus générale !) : comme f est continue sur I, elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Ainsi :

$$\forall x \in I,\ H(x) = \int_a^x f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_a^x = F(x) - F(a)$$

La fonction H est $\mathcal{C}^1$ sur I car F l'est et : $\forall x \in I$, $H'(x) = F'(x) = f(x)$. ($F(a)$ est une *constante*, donc disparaît par dérivation selon x)

IV. Généralisation : intégrale fonction de ses bornes

Plus précisément, il s'agit d'étudier $H : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$ où f est continue sur un intervalle I, et $u, v : J \to I$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle J.

L'essentiel : la fonction H `N'EST PAS` une primitive de f.

1. Sauf exception, **on ne cherche pas** à calculer l'intégrale qui définit $H(x)$.

2. Comme f est continue sur I, elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Ainsi :

$$\forall x \in I,\ H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$$

3. Toutes les propriétés de F découlent de cette égalité.

La fonction H est dérivable sur J car les composéees $F \circ u$ et $F \circ v$ le sont. Et, pour tout $x \in J$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= v'(x) \times F'(v(x)) - u'(x) \times F'(u(x)) \\ &= v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x)) \end{aligned}$$

Exemples

Quelques exemples de dérivation :

$$H : x \mapsto \int_x^{2x} f(t)\ dt \quad \rightsquigarrow \quad H'(x) = 2\ f(2x) - f(x)$$

$$H : x \mapsto \int_x^{x^2} f(t)\ dt \quad \rightsquigarrow \quad H'(x) = 2x\ f(x^2) - f(x)$$

$$H : x \mapsto \int_{-x}^{x} f(t)\ dt \quad \rightsquigarrow \quad H'(x) = f(x) + f(-x)$$

V. Intégrales généralisées

Tous les résultat précédents ont été présentés dans le cadre d'intégrales sur un segment. Pour autant, ils sont tous réutilisables dans le cas où l'on étudie une intégrale généralisée. Commençons par introduire les objets.

Considérons $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Détaillons maintenant comment procéder pour pouvoir réutiliser l'un des résultats précédents.

1. On commence par démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge.
(penser par exemple aux critères de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives)

2. On considère $B \in [a, b[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$ est alors bien définie en tant qu'intégrale sur le segment $[a, B]$ de la fonction f continue sur **le segment** $[a, B]$.

On procède alors en 2 temps :

× on applique l'une des techniques précédentes (primitive à vue, IPP, changement de variable) à $\displaystyle\int_a^B f(t)\ dt$.

× on récupère le résultat souhaité par passage à la limite lorsque $B \to b$.

VI. Intégrales dépendant d'un paramètre

Plus précisément, il s'agit détudier : $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f_x(t)\ dt$.

L'essentiel : la fonction H `N'EST PAS` une primitive de f.

- Sauf exception, **on ne cherche pas** à calculer l'intégrale qui définit $H(x)$.
- Aucun théorème au programme ne dit quoi que ce soit sur la dérivabilité de H (toute tentative de dérivation sous le signe d'intégration est à proscrire !).

Pour mieux comprendre le problème, voici quelques exemples d'intégrandes :

$$f_x : t \mapsto \frac{t^x}{1+t}, \qquad f_x : t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}, \qquad f_x : t \mapsto \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$$

1. On commence par nommer l'intégrande f_x si ce n'est pas fait dans l'énoncé.
On introduit alors $x_0 \in \mathbb{R}$. C'est une « astuce » de notation permettant de comprendre qu'on va étudier f_{x_0} à x_0 fixé.

2. On démontre que f_{x_0} est continue sur l'intervalle $]a, b[$ (ou $[a, b[$, ou $]a, b]$, ou $[a, b]$ selon les cas).
(x_0 étant fixé, on étudie la continuité de f_{x_0} « selon la variable t »)

3. **Ensemble de définition de** H :

× si f_{x_0} est continue sur **le segment** $[a, b]$ alors $\mathscr{D}_H = \mathbb{R}$.

× si f_{x_0} est continue sur $[a, b[$ (par exemple), il faut étudier pour quels valeurs de x_0 l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f_{x_0}(t)\ dt$ est convergente.
Généralement, on cherche un équivalent de $f_{x_0}(t)$ au voisinage de b et on procède alors par théorème de comparaison.

4. **Sens de variation** : on choisit deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \leqslant x_2$ et on détermine le signe de :

$$H(x_2) - H(x_1) = \int_a^b \left(f_{x_2}(t) - f_{x_1}(t)\right)\ dt$$

(étude analogue à celle des suites d'intégrales (I_n))

VII. BONUS : primitives classiques

Primitives classiques.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{-*}$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto e^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto e^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$

(où λ est un réel quelconque)

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	× u dérivable sur I. × $u \neq 0$ sur I.	$x \mapsto \ln(\lvert u(x) \rvert) + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ e^{u(x)}$	× u dérivable sur I.	$x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$

Remarque

- Il faut penser à la forme $x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ dès que la fonction à intégrer contient une puissance. Par exemple :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\, dt &= \int_0^1 \frac{t}{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}\, dt = \int_0^1 t\,(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]_0^1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

- Cette primitive classique est parfois présentée sous la forme suivante :

$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{(u(x))^\beta}$ (avec $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto -\dfrac{1}{\beta-1}\dfrac{1}{(u(x))^{\beta-1}} + \lambda$

(il faut notamment connaître les primitives de $\dfrac{u'}{u^2}$ et de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$)