

CH XII : Comparaisons de fonctions et développements limités

Notations et définitions utiles

Définition (notion d'adhérence)

- On appelle adhérence de l'intervalle I , et on note \bar{I} , l'intervalle I auquel on a rajouté ses bornes finies. Plus précisément, on a :

1) si I à bornes finies $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a < b$) : alors $\bar{I} = I \cup \{a, b\} = [a, b]$.
 (\Leftrightarrow vrai pour $I =]a, b[$, $I =]a, b]$, $I = [a, b[$, $I = [a, b]$)

2) si I à borne(s) infinie(s) :
 × si $I =] - \infty, b[$ ou $I =] - \infty, b]$, alors $\bar{I} =] - \infty, b]$,
 × si $I =]a, +\infty[$ ou $I = [a, +\infty[$, alors $\bar{I} = [a, +\infty[$,
 × si $I =] - \infty, +\infty[$, alors $\bar{I} =] - \infty, +\infty[$.

Définition (notion de voisinage d'un point)

Voisinage d'un point

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $x_0 \in \bar{I}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (f est une fonction définie sur I).

- On appelle **voisinage** (fermé) de x_0 tout segment de la forme : $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On appelle **voisinage épointé** (fermé) de x_0 tout ensemble de la forme $V \setminus \{x_0\}$ où V est un voisinage de x_0 .
 Autrement dit, un voisinage épointé de x_0 est un ensemble de la forme : $[x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0 + \alpha, x_0]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Remarque

On ne considère ici que des voisinages centrés en x_0 . En général, un voisinage (fermé) de x_0 est un segment $[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2]$ avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Autrement dit, c'est un segment qui contient x_0 et non réduit à $\{x_0\}$.

Définition (notion de voisinage de l'infini)

Voisinage de $+\infty$

Soient I un intervalle de \mathbb{R} d'extrémité $+\infty$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur I .

- On appelle **voisinage** (fermé) de $+\infty$ tout intervalle de la forme : $[A, +\infty[$ où A est un réel (tel que $A > 0$).
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe $A (> 0)$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$.

Voisinage de $-\infty$

Soient I un intervalle de \mathbb{R} d'extrémité $-\infty$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur I .

- On appelle **voisinage** (fermé) de $-\infty$ tout intervalle de la forme : $] - \infty, -B]$ où B est un réel (tel que $B > 0$).
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $-\infty$ s'il existe $B (> 0)$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap] - \infty, -B]$.

Remarque

- La notion de voisinage permet de formaliser l'idée de propriété vérifiée « à proximité » d'un point x_0 ou « à proximité » de l'infini.
- On trouve naturellement la notion de voisinage lorsque l'on s'intéresse au comportement local d'une fonction. Par exemple, dire que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (définie sur un intervalle I) admet la limite ℓ en $x_0 \in I$, c'est dire que $f(x)$ peut approcher ℓ aussi près que l'on veut pour peu que x soit suffisamment proche de x_0 . Cela s'exprime comme suit :

$$\forall v \in \mathcal{V}_\ell, \exists U \in \mathcal{V}_{x_0}, \forall x \in I \cap U, f(x) \in V$$

ou encore : $\forall v \in \mathcal{V}_\ell, \exists U \in \mathcal{V}_{x_0}, \forall x \in I, x \in U \Rightarrow f(x) \in V$.

Il est à noter que cette définition est valable pour x_0 (resp. ℓ) fini ou non.

I. Relations de comparaisons et théoème des crois- sances comparées

I.1. Négligeabilité

Définition

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I .

Soit $x_0 \in \bar{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0 .

- On dit que f est **négligeable devant** g en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- Si c'est le cas, on dit que « f est un petit o de g en x_0 » ($o = 15^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet) et on note : $f(x) = \underset{x \rightarrow x_0}{o} g(x)$.

- On utilise aussi parfois la notation : $f(x) \ll g(x)$.

Cette notation trompeuse (à ne surtout pas confondre avec $f(x) \leq g(x)$!) est réservée à l'écriture d'échelles de comparaison asymptotiques.

I.2. Croissances comparées

Théorème 1.

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$$

et

$$\forall a > 0, \forall q > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{q^x} = 0$$

Remarque

- On peut écrire le résultat de ce théorème sous la forme d'une échelle de comparaison asymptotique :

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \forall q > 1, (\ln x)^b \ll_{+\infty} x^a \ll_{+\infty} q^x$$

- Cela signifie que la croissance asymptotique (*i.e.* en $+\infty$) logarithmique est beaucoup plus faible que la croissance asymptotique polynomiale qui est elle-même beaucoup plus faible que la croissance asymptotique exponentielle.
- Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q^x}{x^a} = +\infty$$

- Classiquement, on pourra choisir $q = e^1$ ou $q = e^2$, ou $q = e^c$ avec $c > 0$ (on a bien $e^c > 1$). Ceci permet de comparer le comportement asymptotique de e^{cx} et x^a . Plus précisément : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{cx}}{x^a} = +\infty$.

- On en déduit aussi que : $\forall a > 0, \forall r \in]0, 1[, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a r^x = 0$

Il suffit de remarquer que si $r \in]0, 1[$, alors $q = \frac{1}{r} > 1$.

On a alors : $x^a r^x = x^a \left(\frac{1}{q}\right)^x = \frac{x^a}{q^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- Ainsi que : $\forall a > 0, \forall b > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a (\ln x)^b = 0$

La démonstration se fait grâce au changement de variable $X = \frac{1}{x}$.

I.3. Équivalence

I.3.a) Définition

Définition

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I .

Soit $x_0 \in \bar{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0 .

- On dit que f est **équivalente à g en x_0** et on note $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Remarque

- Trouver une fonction g équivalente à une fonction f en x_0 c'est trouver une fonction qui a le même comportement que f à proximité de x_0 . Ainsi, si l'on se place à proximité de x_0 , les courbes représentatives de f et de g apparaîtront comme confondues.
- Le but est de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que la fonction f (penser par exemple aux fonctions polynomiales).
- En première année, on parle plutôt de recherche de termes dominants. Rappelons brièvement ce procédé. Lorsque l'on cherche la limite d'une **SOMME** de termes, on met en facteur celui qui a la plus forte croissance (on le repère souvent à l'aide du théorème des croissances comparées). Ce faisant, le deuxième facteur obtenu a pour limite 1.

Voici un exemple de recherche de terme dominant en $+\infty$:

$$\frac{-4x^2 e^x + 2 \ln(x) + 5x^7 \ln(x)}{2x^3 + 5} = \frac{-4x^2 e^x}{2x^3} \frac{1 + \frac{2 \ln(x)}{-4x^2 e^x} + \frac{5x^7 \ln(x)}{-4x^2 e^x}}{1 + \frac{5}{2x^3}}$$

$$\text{avec } 1 + \frac{2 \ln(x)}{-4x^2 e^x} + \frac{5x^7 \ln(x)}{-4x^2 e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{5}{2x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

I.3.b) Propriétés générales

Théorème 2.

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \bar{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$). (lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

La relation $\underset{x \rightarrow x_0}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.

- 1) *Réflexivité* :
- 2) *Symétrie* :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$$

- 3) *Transitivité* :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x)$$

Démonstration.

- 1) Il suffit d'écrire : $\frac{f(x)}{f(x)} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1.$

- 2) Il suffit d'écrire : $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{1} = 1.$

- 3) Il suffit d'écrire : $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \times 1 = 1. \quad \square$

Remarque

- La relation $\underset{x \rightarrow x_0}{\sim}$ est une relation binaire réflexive, symétrique, transitive. Les relations vérifiant ce type de propriétés sont appelées des **relations d'équivalence**.

- Nous avons déjà rencontré ce type de relations binaires :
 - × $\underset{x \rightarrow x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur les fonctions définies au voisinage du point x_0 .
 - × \Leftrightarrow est une relation d'équivalence sur les propriétés mathématiques.
 - × la relation de similitude est une relation d'équivalence sur les matrices.

I.3.c) Équivalents et limites

Théorème 3.

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \bar{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

(avec ℓ limite éventuellement infinie)

2) Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ell$$

(avec ℓ limite finie)

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R} \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$$

(avec ℓ limite finie)

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \times \ell = \ell$.

2) Il suffit d'écrire : $\frac{f(x)}{\ell} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{\ell}{\ell} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{\ell}{\ell} = 1$. □

Remarque

- L'hypothèse $\ell \neq 0$ est primordiale pour les propriétés du point 2.
Par exemple :

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{x} \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

- Au passage, précisons que l'on ne doit **JAMAIS** écrire : $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 0$.
 - × car la définition établie dans ce cours ne nous permet tout simplement pas de définir correctement cette écriture.
 - × car c'est un cas qui a peu d'intérêt pratique puisqu'il signifie que f est nulle dans un voisinage de 0.
- Comme on l'a vu précédemment, la recherche d'équivalents (ou de termes dominants) ne se fait que lorsque l'on considère une **SOMME** de termes. Cependant, on peut parfois aussi simplifier les produits lorsque l'un des termes admet une limite finie **non nulle** au voisinage du point considéré.

Par exemple :

× $e^x \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \times \ln(x) = \ln(x)$.

× $\frac{\ln(x)}{2e^{\frac{1}{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{2e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \ln(x)$.

× $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1}} = e^{\frac{1}{x}}$.

(on se sert ici de la compatibilité de $\underset{x \rightarrow x_0}{\sim}$ avec le produit : cf théorème suivant)

I.3.d) Calculs d'équivalents en pratique : compatibilité avec le produit, le quotient, l'élevation à la puissance α

Théorème 4.

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \bar{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) Compatibilité avec le produit :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} t(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \times h(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \times t(x)$$

2) Compatibilité avec le quotient :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} t(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}$$

3) Compatibilité avec l'élevation à la puissance $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow (f(x))^n \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^n$$

4) Compatibilité avec l'élevation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ g > 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow (f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$$

5) Compatibilité avec la valeur absolue :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow |f(x)| \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} |g(x)|$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire :

$$\frac{f(x) \times h(x)}{g(x) \times t(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{h(x)}{t(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \times 1 = 1$$

2) Il suffit d'écrire :

$$\frac{\frac{f(x)}{h(x)}}{\frac{g(x)}{t(x)}} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{t(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \times 1 = 1$$

3) Deux cas se présentent.

$$\times \text{ si } n = 0 : (f(x))^0 = 1 \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 1 = (g(x))^0.$$

\times si $n > 0$: alors, par compatibilité avec le produit :

$$(f(x))^n = f(x) \times \dots \times f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \times \dots \times g(x) = (g(x))^n$$

4) Comme $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, f et g ont même signe (strictement positif) au voisinage de x_0 . D'autre part, pour tout x au voisinage de x_0 :

$$\frac{(f(x))^\alpha}{(g(x))^\alpha} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^\alpha = \exp \left(\alpha \ln \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \right) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \exp(\alpha \times 0) = e^0 = 1$$

5) Il suffit d'écrire :

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} |1| = 1 \quad \square$$

Exemple

$$\bullet e^x + \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x.$$

$$\bullet e^x \times \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x \times \ln(x).$$

(on ne risque pas de simplifier un produit si aucun des deux termes de ce produit ne se simplifie)

$$\bullet (e^x + 1) \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x \ln(x).$$

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{e^x}} = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}.$$

$$\bullet \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}.$$

$$\bullet \text{Limite en } +\infty \text{ de la fonction } f \text{ définie par : } f(x) = \frac{(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10} ?$$

Tout d'abord :

$$\frac{(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(3x)^3(8x^{-2})}{9x} = \frac{3^3 x^3 \times 8x^{-2}}{9x} = \frac{3^3 \cancel{8x}}{\cancel{9}x} = 24$$

$$\bullet \text{Limite en } +\infty \text{ de } \ln\left(\frac{e^x + x^2}{e^x - 1}\right) ?$$

Tout d'abord :

$$\frac{e^x + x^2}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Donc, par composition des limites :

$$\ln\left(\frac{e^x + x^2}{e^x - 1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Par contre : } \ln\left(\frac{e^x + x^2}{e^x - 1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1) = 0.$$

Remarque

Le théorème précédent stipule que l'opérateur $\underset{x \rightarrow x_0}{\sim}$ est compatible avec les opérations de produit et quotient.

Il faut faire attention, ce n'est pas le cas de toutes les opérations.

1) Considérons l'exemple suivant.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x + \sqrt{x} \\ g(x) = x + \ln(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = -x \\ t(x) = -x \end{array} \right\} \Rightarrow h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} t(x)$$

$$\text{mais } \sqrt{x} = f(x) + h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x) + t(x) = \ln(x).$$



On ne peut sommer des équivalents !

2) Considérons l'exemple suivant.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x + 1 \\ g(x) = x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$$

$$\text{mais } e^{x+1} = e^{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{g(x)} = e^x \text{ puisque } \frac{e^{x+1}}{e^x} = e \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$



De manière générale, on en peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une équivalence !

Ici, on avait en fait le résultat suivant :

$$\begin{aligned} e^{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{g(x)} &\Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \Leftrightarrow e^{f(x)-g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \\ &\Leftrightarrow f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

II. Notion de développement limité

II.1. Rappel : taux d'accroissement et dérivabilité

II.1.a) Taux d'accroissement

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0 la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

Interprétation physique

Un taux d'accroissement peut être pensé comme une **vitesse moyenne** : la quantité $f(x) - f(x_0)$ représente un déplacement effectué sur un laps de temps $x - x_0$.

- La vitesse moyenne de déplacement d'une voiture entre deux moments t_1 et t_2 , est définie par un taux d'accroissement :

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{km(t_2) - km(t_1)}{t_2 - t_1}$$

où $km(t)$ désigne le nombre de kilomètres effectués du temps 0 jusqu'à la date t . Sauf à considérer que l'on peut effectuer des kilomètres négatifs, cette vitesse moyenne est toujours positive.

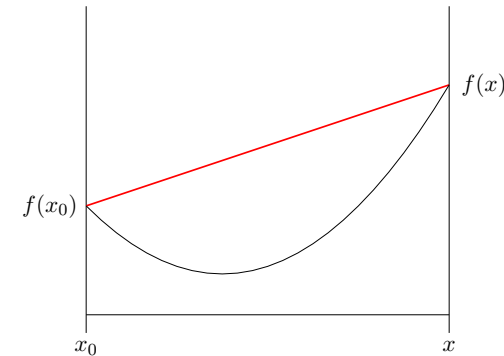
- On peut aussi citer le taux d'accroissement d'une population :

$$\text{Accroissement démographique} = \frac{pop(t_2) - pop(t_1)}{t_2 - t_1}$$

où $pop(t)$ désigne la taille de la population du temps 0 jusqu'à la date t . Notez que l'on peut avoir un taux d'accroissement négatif : cela signifie que la population a diminué.

Interprétation graphique

Notons $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$ points de la courbe représentative de f . Alors $\tau_{x_0}(f)(x)$ est la pente de la corde M_0M .



II.1.b) Dérivée d'une fonction en un point

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

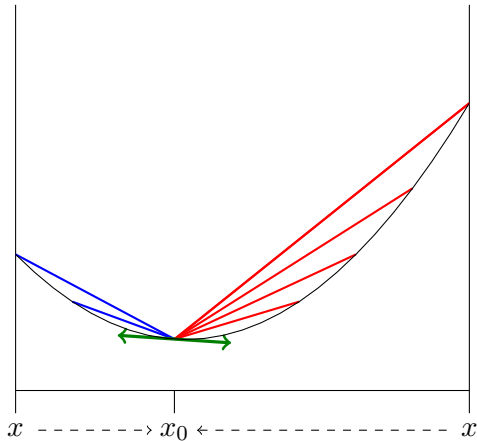
- On dit que f est **dérivable en x_0** lorsque la fonction $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0 .
- Lorsque cette limite existe, elle est appelée **nombre dérivé de f en x_0** et est noté $f'(x_0)$. Autrement dit :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interprétation physique

- Le taux d'accroissement s'interprétant comme une vitesse moyenne, sa limite en un point s'interprète comme une vitesse instantanée.
- Par exemple, si une voiture a effectué 200 km en 2H, c'est qu'elle a roulé en moyenne à 100 km/H. Mais elle a pu effectuer des pointes à 130 km/H.

Interprétation graphique



Remarque

- Si f est dérivable en x_0 , en effectuant le changement de variable $h = x - x_0$, on obtient :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(c'est une définition équivalente)

- Dire qu'une fonction f est dérivable en x_0 c'est dire que la fonction taux d'accroissement $\tau_{x_0}(f)$ est continue en x_0 (on peut alors prolonger cette fonction par continuité en posant $\tau_{x_0}(f)(x_0) = f'(x_0)$).

II.2. Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point

II.2.a) $DL_1(x_0)$ et approximation affine de f en x_0 Définition $DL_1(x_0)$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0 .

- On dit que f possède un **développement limité d'ordre 1** en x_0 s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Remarque

- Si f admet un $DL_1(x_0)$ alors on a : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - (a + b(x - x_0)) = 0$.
Ainsi, les courbes représentatives de f et de la droite d'équation $y = a + b(x - x_0)$ ont tendance à se confondre à proximité de x_0 .
- C'est pourquoi on dit que la droite d'équation $y = a + b(x - x_0)$ est une **approximation affine** de f en x_0 .
↪ c'est la droite qui représente le mieux la fonction f au voisinage de x_0 .

Théorème 5.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0 .

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ admet un développement limité d'ordre 1 en } x_0$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\begin{cases} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{cases}$

Ainsi, si f est dérivable en x_0 , il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Démonstration.

(\Rightarrow) Supposons f dérivable en x_0 .

$$\text{Notons } \varepsilon(x) = \begin{cases} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

(c'est le ε donné par la formule finale)

On a alors $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$:

$$\varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0)$$

$$\text{donc } \varepsilon(x) + f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{et } f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Finalement, on a bien :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

(\Leftarrow) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

$$\times a = f(x_0) \text{ (le développement est vérifié en } x_0 \text{ !)}$$

$$\times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$$

Comme $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0 , on en conclut que f est dérivable en x_0 . De plus, d'après le point précédent :

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \square$$

Remarque

- D'après ce théorème, il y a unicité (lorsqu'il existe) du développement limité de f d'ordre 1 en x_0 .
- Un développement limité établit une égalité vérifiée au voisinage de x_0 . Cela signifie qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

II.2.b) Tangente de f en x_0

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en x_0 , on appelle **tangente de f en x_0** la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$.

- Autrement dit, c'est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Remarque

Il arrive parfois que la fonction f possède une dérivée à gauche et à droite en x_0 sans pour autant être dérivable en x_0 . Plus précisément, c'est le cas lorsque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$. On introduit alors les notions suivantes.

- La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$.
- La demi-tangente à droite de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$.

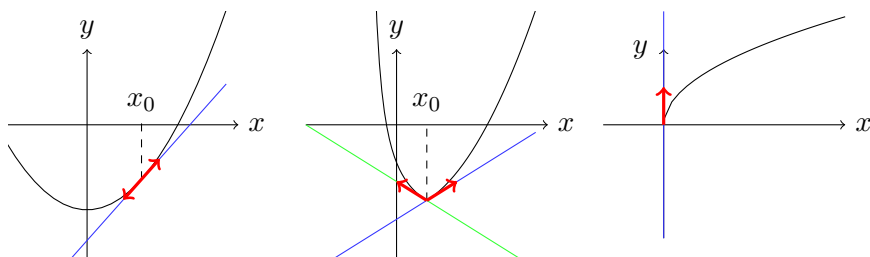
Définition (Tangente de la forme $x = x_0$)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Supposons que :

- f est continue en x_0
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) (f est donc non dérivable en x_0)
- On appelle **tangente verticale de f en x_0** la droite verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation $x = x_0$.

Représentation graphique



Tangente

Demi-tangentes

Tangente verticale

II.2.c) $DL_1(x_0)$ et négligeabilité / équivalence

Dans l'écriture du $DL_1(x_0)$ de f , on a introduit l'écriture $(x - x_0)\varepsilon(x)$ où la fonction ε est telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La fonction $x \mapsto (x - x_0)\varepsilon(x)$ est négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0 .
En effet :

$$\frac{\cancel{(x - x_0)}\varepsilon(x)}{\cancel{x - x_0}} = \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

- C'est une écriture générique d'une fonction négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0 . Cette écriture étant un peu lourde, on utilisera généralement la notation $o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$.

Formule de Taylor-Young (à l'ordre 1)

Si f est dérivable en x_0 , son $DL_1(x_0)$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$$

Exemple

Avec cette notation, au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$e^x = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

Remarque

- Il est à noter que le premier terme non nul de ces développements fournit un équivalent de la fonction considérée.

On retrouve ainsi : $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ (i.e. $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$).

(ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = \ln(1+x)$ peut-être confondue avec sa tangente $y = x$ à proximité de 0)

- D'autre part, on a aussi : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$.

(ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = e^x$ peut-être confondue avec sa tangente $y = 1 + x$ à proximité de 0)

- Enfin, on peut aussi écrire que : $e^x - 1 = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$.

On retrouve alors : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ (i.e. $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$).

(ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = e^x - 1$ peut-être confondue avec sa tangente $y = x$ à proximité de 0)

II.3. Développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point

II.3.a) Définition

Définition DL₂(x₀)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0 .

- On dit que f possède un **développement limité d'ordre 2** en x_0 s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

- Ce que l'on peut encore écrire :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^2)$$

Remarque

- Si f admet un DL₂(x₀) alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - (a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2) = 0$.
Ainsi, les courbes représentatives de f et $g : x \mapsto a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2$ ont tendance à se confondre à proximité de x_0 .
- Un DL₂(x₀) fournit une **approximation quadratique** de f en x_0 .
- Dans le programme ECE, on se limite aux développements limités à l'ordre 2. Mais on pourrait définir de même la notion de développement limité en x_0 à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3.b) Formule de Taylor-Young

Théorème 6.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0 .

$$f \text{ est deux fois dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ admet un développement limité d'ordre 2 en } x_0$$

- Lorsque la fonction f est deux fois dérivable, elle admet un DL₂(x₀) dont les coefficients sont :

$$\begin{cases} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \\ c = \frac{f''(x_0)}{2} \end{cases}$$

- Ainsi, si f est deux fois dérivable en x_0 , il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) telle que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- Ce que l'on peut encore écrire :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^2)$$

Démonstration.

Admis. □

Remarque

- D'après ce théorème, il y a unicité (lorsqu'il existe) du développement limité de f d'ordre 2 en x_0 .
- Ce théorème est énoncé avec l'hypothèse : f deux fois dérivable en x_0 . Évidemment, ce théorème est vérifié avec l'hypothèse plus forte : f est de classe \mathcal{C}^2 en x_0 . C'est l'hypothèse que l'on utilisera aux concours.
- Si la fonction f est de classe \mathcal{C}^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) en x_0 , on peut écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

II.3.c) Développements limités usuels en 0**Théorème 7.**

Rappelons que si f est deux fois dérivable en 0 alors son $DL_2(0)$ s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\bullet \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\bullet \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\bullet \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\bullet \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

On en déduit notamment : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$

II.3.d) Calcul pratique des développements limités**Somme et produit de développements limités**

On l'a déjà dit : un développement limité établit une égalité vérifiée au voisinage de x_0 . Ainsi, toutes les opérations raisonnables sur les égalités sont envisageables sur les développements limités. On pourra notamment réaliser des **sommes** (ce qui n'autorise toujours pas à sommer des équivalents!) et des **produits** de développements limités.

Exercice

- 1) Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x} + x$.
- 2) Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto e^x - e^{-x}$.
- 3) Déterminer le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto (1+x)e^x$.

Théorème 8. (manipulation pratique des $o_{x \rightarrow 0}(\cdot)$)

Afin de déterminer de manière mécanique le $DL_2(0)$ d'une somme ou d'un produit de fonctions, on pourra utiliser les propriétés suivantes.

Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$1) \quad o_{x \rightarrow 0}(x^m) + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^{\min(m,n)}) \quad 2) \quad o_{x \rightarrow 0}(x^m) - o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^{\min(m,n)})$$

$$3) \quad \text{Si on suppose de plus } m < n : \quad o_{x \rightarrow 0}(x^m) + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^m)$$

$$4) \quad x^m \times o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^{m+n})$$

$$5) \quad o_{x \rightarrow 0}(x^m) \times o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^{m+n})$$

$$6) \quad \text{Pour tout } c \in \mathbb{R} : \quad o_{x \rightarrow 0}(cx^n) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Développement limités et composition

On peut aussi, sous certaines hypothèses, agir par composition. Considérons une fonction f définie dans un voisinage de 0 et deux fois dérivable en 0.

- D'après la formule de Taylor-Young, pour tout u au voisinage de 0, on a :

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{f''(0)}{2}u^2 + u^2 \varepsilon(u)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 et telle que : $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$.

Soit x dans un voisinage de 0. Alors $u = 2x$ est lui aussi dans un voisinage de 0. En appliquant l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(0) + f'(0)(2x) + \frac{f''(0)}{2}(2x)^2 + (2x)^2 \varepsilon(2x) \\ &= f(0) + 2f'(0)x + 2f''(0)x^2 + x^2(4\varepsilon(2x)) \end{aligned}$$

Et comme, par composition de limite : $\lim_{x \rightarrow 0} 4\varepsilon(2x) = 4 \times 0 = 0$, l'égalité au-dessus est bien le DL₂(0) de la fonction $g : x \mapsto f(2x)$.

- On peut procéder de même pour $u = \psi(x)$ si l'on sait que $\psi(x)$ est dans un voisinage de 0 lorsque x l'est (autrement dit pour une fonction ψ telle que : $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$). On définit alors le DL₂(0) de la fonction $g : x \mapsto f(\psi(x))$.
- Il est conseillé, lorsque l'on souhaite écrire un DL₂(0) à l'aide d'une composition, de repasser par l'écriture à l'aide des fonctions ε .

Exercice

- 1) Déterminer le DL₂(0) de la fonction $x \mapsto \ln(1 + 2x)$.
- 2) Déterminer le DL₂(0) de la fonction $x \mapsto \frac{e^{2x}}{1 - 2x}$.
- 3) Déterminer le DL₂(0) de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.
- 4) Déterminer le développement asymptotique (c'est à dire lorsque x est au voisinage de $+\infty$) de la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

II.3.e) Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente

Théorème 9.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0 .

On suppose de plus que f est deux fois dérivable en x_0 .

On a alors, dans un voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^2)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) &= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^2) \\ &\underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

La position locale de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à sa tangente en x_0 est donnée par le signe de $f''(x_0)$. Plus précisément :

- × si $f''(x_0) > 0$, alors, au voisinage de x_0 , \mathcal{C}_f est située au-dessus de sa tangente.
- × si $f''(x_0) < 0$, alors, au voisinage de x_0 , \mathcal{C}_f est située en-dessous de sa tangente.