Feuille d'exercices n°12 : Développements limités

Exercice 1. (★)
Calculer les limites des fonctions suivante aux points indiqués.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)+x-1}{x+e^{-x}}$
en 0^+ et en $+\infty$.

2. $f_2 : x \mapsto \ln\left(e^{-x}+x^{-2}\right)$
en 0^+ et en $+\infty$.

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{xe^x+1}{e^x+1}$
en 0^+ en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. $f_4 : x \mapsto x^4 e^{-\sqrt{x}}$
en $+\infty$.

5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)+\ln(x)}{\sqrt{x+1}}$
en 0^+ et en $+\infty$.

6. $f_6 : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$
en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 2. (★)
À l'aide d'équivalents ou de développements limités, déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{x\ln(1+x)}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{2x^2}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\ln(x+1)-x\ln(x)$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{2x}$

Exercice 3. (★)
Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ comme suit :

$$f(0)=1 \quad \text{et} \quad : \ \forall x \in\ ]-\infty,1[\ \setminus \{0\},\ f(x)=\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty,1[$.

2. *a)* Déterminer le développement limité de la fonction : $x \mapsto \ln(1-x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

b) En déduire que f est dérivable en 0 puis vérifier que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

3. *a)* Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,1[\ \setminus \{0\}$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in\ ]-\infty,1[\ \setminus \{0\}$.

b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$ lorsque $x \in\ ]-\infty,1[$.

c) En déduire les variations de f.

d) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

5. En utilisant les questions ***2.b)*** et ***3.a)***, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

Exercice 4. (★)
Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes.

1. $f_1(x)=\begin{cases} x\ln(x^2)-2x & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

2. $f_2(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{1-e^{-2x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

3. $f_3(x)=\begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x\in\ ]0,+\infty[\ \setminus\{1\} \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases}$

4. $f_4(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

Exercice 5. (★)
Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}\ln(1+x)$.

1. Calculer le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.

2. En déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Exercice 6. (★)

1. Déterminer un équivalent des fonctions suivantes aux points indiqués.

a) $f_1(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x\ln(1+x)-x^2}$ en 0 et en $+\infty$.

b) $f_2(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ en 0 et en $+\infty$.

c) $f_3(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ en $+\infty$ et en 0.

2. Déterminer : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ *(indication : on pourra poser $t=x-1$).*

Exercice 7. (★)

1. Montrer :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt$$

2. En écrivant l'égalité précédente pour $n=2$, puis $n=3$, montrer :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leqslant x-1+\mathrm{e}^{-x}\leqslant\frac{x^2}{2}$$

3. En déduire un équivalent de $x-1+\mathrm{e}^{-x}$ en 0.

4. Retrouver le résultat précédent sans calculs.

Exercice 8. (★)
On note $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$.

3. Montrer : $f'(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\dfrac{1}{2}$.

4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Exercice 9. (★)
Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f:x\mapsto\begin{cases}x^{1+\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. *a)* Montrer que f est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0.

2. *a)* Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln(x)\leqslant x+1$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$ et déterminer son signe.
Préciser le sens de variation de f.

3. *a)* Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer un équivalent de $f(x)-x$ en $+\infty$.
En déduire la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Exercice 10. (★)
Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_n(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} \qquad \text{et} \qquad f_n(0) = 0$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *a)* Montrer que f_n est continue à droite en 0.

b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.

2. *a)* Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.

b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.

3. *a)* Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.

b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Que dire au voisinage de $-\infty$?

c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, (C_n) admet une asymptote oblique (D_n) dont on donnera une équation.
Préciser la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

d) Donner l'allure de la courbe (C_1).

Énoncés de concours

Exercice 11. (★★★) *(d'après* `ESSEC II 2016`*)*
Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

0. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

Par une série de questions, on démontrait alors que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.
De plus, dans ce cas : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.
(on pourra utiliser ce résultat dans la suite)

1. Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

2. Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

3. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

4. *a)* Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

5. Montrer, en utilisant le résultat de *3.*, que :

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X = j]) = \alpha$$

6. Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 12. ($\bigstar$) *(d'après* `ECRICOME 2018`*)*
Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

e) Écrire une fonction d'en-tête : `function y = u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

2. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers γ.

3. ***a)*** Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question ***1.e)*** a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = input('Entrer un réel strictement positif : ')
n = floor(1/eps) + 1
disp(u(n))
```

Exercice 13. ($\star$) *(d'après* `ECRICOME 2017`*)*
On note pour tout $x \in\ ]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

2. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

Exercice 14. (★★) *(d'après* `EDHEC 2017`*)*

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la v.a.r. Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
  On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. ***a)*** Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3. ***a)*** Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt$$

c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

4. ***a)*** Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u}\ du$$

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

Exercice 15. (★★) *(d'après* `EDHEC 2018`*)*

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\ dt$.

1. ***a)*** Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2. ***a)*** Montrer que f est impaire.

b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3. ***a)*** Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) \ = \ x\ \big(\ln(1+x^2) - 2\big) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ dt$ est une intégrale convergente.

b) En déduire que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x \ln(1+x^2)$.

c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2x\ \ln(x)$$

d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$$

b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.

c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$).

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1, 1, 'unf', a, b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U = grand(1, 100 000, 'unf', 0, 1)
V = log(1 + U .^2)
f = -----
disp(f)
```