I. Résumé des notions de limites

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. Soient $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- **Limites finies en un point**

a. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$

b. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ si : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$

c. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ si : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$

- **Limites infinies en un point**

Limite $+\infty$

a. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$

b. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$

c. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$

Limite $-\infty$

d. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$

e. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$

f. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$

- **Limites en l'infini**

Limites en $+\infty$

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$

Limites en $-\infty$

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$

e. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$

f. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si : $\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$

II. Limite des opérations sur les fonctions

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$. On note $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

	Somme : $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$		
$\lim\limits_{x_0} g$ \ $\lim\limits_{x_0} f$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Ce cas amène à considérer une F.I. : $\boxed{+\infty - \infty}$

	Produit : $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x)$				
$\lim\limits_{x_0} g$ \ $\lim\limits_{x_0} f$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Ce cas amène à considérer une F.I. : $\boxed{0 \times \infty}$

	Quotient : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x)$				
$\lim\limits_{x_0} g$ \ $\lim\limits_{x_0} f$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$ et $g > 0$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = 0$ et $g < 0$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.
$-\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.

Ce cas amène à considérer deux F.I. : $\boxed{\dfrac{0}{0} \quad , \quad \dfrac{\infty}{\infty}}$