

CH XI : Variables aléatoires réelles à densité

Lois à densité usuelles

I. Loi uniforme sur un intervalle réel

I.1. Densité

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$ (pour a et b deux réels tels que $a < b$) si :

a) $X(\Omega) = [a, b]$

- b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \in]b, +\infty[\end{cases} \end{cases}$$

- On utilisera la notation $X \leftrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Remarque générale sur les lois à densité

- Rappelons tout d'abord qu'une v.a.r. X à densité admet une infinité de densités : une densité f_X de X sera toujours une densité de X si on modifie sa valeur sur un nombre fini de points, à condition que les nouvelles valeurs données soient toutes positives. Pour autant, il faut comprendre que toutes les densités de X produisent la même fonction de répartition.
- On présente dans ce cours **UNE** densité possible pour chaque loi usuelle. Mais on gardera en tête le point précédent. En particulier, il ne faut pas accorder d'importance sur le caractère ouvert ou fermé des intervalles intervenant dans la définition par cas de chaque densité f .
- Dans les énoncés de concours, il sera pas toujours précisé l'ensemble image de la v.a.r. X considéré. Lorsque la v.a.r. en question suit une loi usuelle, on pourra considérer que son ensemble image est celui précisé dans ce cours.

Remarque

- On vérifie aisément que f est bien une densité de probabilité :
 - f est continue sur $] -\infty, a[\cup]a, b[\cup]b, +\infty[$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
 - Remarquons tout d'abord :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

car f est nulle en dehors de $[a, b]$.

La fonction f est continue par morceaux sur le **segment** $[a, b]$.

Ainsi, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est bien définie. De plus :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

- On définit de même la loi uniforme sur $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$.

I.2. Fonction de répartition

Théorème 1.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Alors sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \in]b, +\infty[\end{cases} \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- Si $x < a$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

- Si $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt \\ &= 0 + \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

- Si $x > b$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt + \int_b^x f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_a^x 0 dt \\ &= 0 + \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1 \quad \square \end{aligned}$$

I.3. Espérance et variance

Théorème 2.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ ($a < b$).

- 1) X admet une espérance.

- 1) X admet une variance.

Alors, on a :

$$2) \quad \boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}}$$

(point milieu de $[a, b]$)

$$2) \quad \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment.

- Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_a^b t f_X(t) dt$$

car f_X est nulle en dehors de $[a, b]$.

- La fonction $t \mapsto t f_X(t)$ est continue par morceaux sur le **segment** $[a, b]$, donc $\int_a^b t f_X(t) dt$ est bien définie.

Ainsi, X admet une espérance.

- Enfin :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt &= \int_a^b t f(t) dt = \int_a^b \frac{t}{b-a} dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt = \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

- La v.a.r. X admet une variance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment.

- Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt = \int_a^b t^2 f_X(t) dt$$

car f_X est nulle en dehors de $[a, b]$.

- La fonction $t \mapsto t^2 f_X(t)$ est continue par morceaux sur le **segment** $[a, b]$, donc $\int_a^b t^2 f_X(t) dt$ est bien définie.

Ainsi, X admet une variance.

- D'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_a^b t^2 f(t) dt = \int_a^b \frac{t^2}{b-a} dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} (b^3 - a^3) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{\cancel{b-a}} (\cancel{b-a}) (a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

- Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huyghens, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{1}{12} (4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)) \\ &= \frac{1}{12} (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{1}{12} (b-a)^2 \quad \square \end{aligned}$$

I.4. Loi uniforme sur $[0, 1]$

I.4.a) Simulation informatique

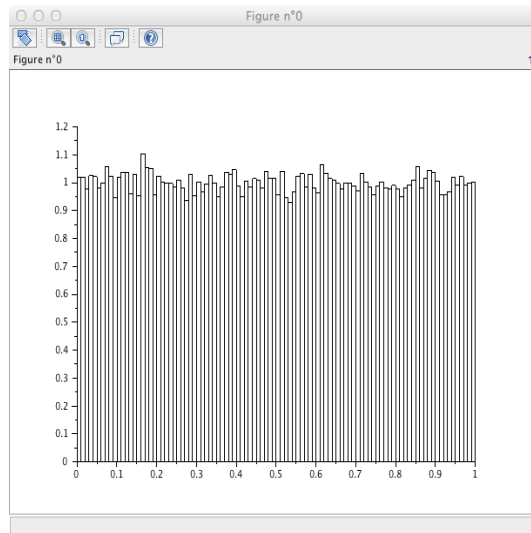
- En **Scilab**, l'instruction `rand()` permet de simuler une v.a.r. qui suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1[)$ (on notera l'absence d'argument de l'appel).
- On rappelle que simuler une v.a.r. X c'est écrire un programme qui renvoie une valeur possible pour X (un élément $x \in X(\Omega)$). Ainsi, à chaque appel, l'instruction `rand()` renvoie une valeur dans $[0, 1[$.
- Pour autant, une fonction qui renvoie toujours la valeur $\frac{1}{2}$ n'est pas une simulation d'une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$. Il faut bien évidemment que les valeurs renvoyées par l'instruction `rand()` soient réparties de manière uniforme dans l'intervalle $[0, 1[$. C'est le rôle du générateur pseudo-aléatoire (codé par la fonction `rand`) de veiller à cette bonne répartition.
- Il est simple de vérifier informatiquement que les valeurs produites par `rand` sont bien uniformément réparties sur $[0, 1[$. Pour ce faire, l'idée naturelle est la suivante :
 - × on effectue N appels à la fonction `rand` (avec N grand).
 - × on découpe l'intervalle $[0, 1[$ en nbC sous-intervalles (appelés des classes).
 - × on trace alors l'histogramme dont la hauteur des barres n'est autre que l'effectif de la classe considérée (*i.e.* le nombre de valeurs générées qui appartiennent à la classe).

```

1 // Paramètres
2 N = 100 000
3 nbC = 100
4
5 // On génère N valeurs de rand
6 Obs = rand(1, N)
7
8 // Histogramme des effectifs
9 histplot(nbC, Obs)

```

On obtient l'histogramme suivant.



Histogramme des effectifs

- L'instruction `rand(1, N)` permet de simuler un N-échantillon (U_1, \dots, U_N) de la v.a.r. U . Cela signifie que :
 - × les v.a.r. U_1, \dots, U_N sont indépendantes.
 - × les v.a.r. U_1, \dots, U_N ont toutes la même loi, celle de U , à savoir $\mathcal{U}([0, 1])$.
- Plus précisément, ce programme fournit une observation `Obs` = (u_1, \dots, u_N) de ce N-échantillon (chaque u_i est une valeur possible pour U_i).
- La Loi (faible) des Grands Nombres (LfGN) permet d'affirmer (on y reviendra le temps voulu) :

$$\frac{\text{Effectif de la classe } c_1}{\text{Effectif total}} \simeq \mathbb{P}([0 \leq U \leq 0.01])$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$\frac{1000}{100000} \qquad 0.01$$

où on a noté $c_1 = [0, 0.01]$ la première des 100 classes considérées.

Le vecteur `Obs` contient $N = 100000$ valeurs. Chaque barre a approximativement même hauteur ce qui signifie que chacune des 100 classes a une taille (on parle d'effectif) de 1000 éléments environ.

Il est à noter que l'histogramme est **normalisé** de sorte que la somme des aires de toutes les barres vaut 1. La hauteur h commune à chaque barre de ce graphique normalisé est obtenue par le calcul : $100 \times (h \times 0.01) = 1$. Ainsi : $h = 0.01$.

- La ligne `Obs` peut être remplacée par :

`Obs = grand(1, N, "def")`

Cette utilisation de `grand` permet de simuler 1 N-échantillon (U_1, \dots, U_N) de la v.a.r. U .

I.4.b) Caractéristiques de la loi uniforme sur $[0, 1]$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, ses caractéristiques sont les suivantes.

- Densité :

$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

- Fonction de répartition :

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

- Espérance de X :

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$

- Variance de X :

$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{12}$

Remarque

- Il est facile de représenter en **Scilab** cette densité f_X choisie pour la loi $\mathcal{U}([0, 1])$. On commence par définir cette fonction.

```

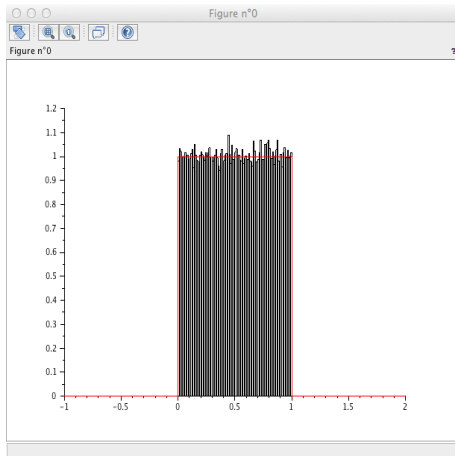
1  function y = densiteUniforme(x)
2      if x < 0 then
3          y = 0
4      elseif x <= 1 then
5          y = 1
6      else
7          y = 0
8      end
9  endfunction

```

- On peut alors la rajouter sur le tracé précédent en ajoutant la ligne :

```
10 plot(linspace(-1, 2, 3001), densiteUniforme, "r")
```

On obtient le graphique suivant.



Le graphe de la densité coïncide avec le graphique précédent.

Cela revient à approcher la densité f_U par la hauteur de chaque barre. Cette approximation est validée par la LfGN puisque :

$$\int_0^{0.01} f_U(t) dt \simeq \int_0^{0.01} h_1 dt = 0.01 \times h_1 \simeq \mathbb{P}([0 \leq U \leq 0.01])$$

où on a noté h_1 la hauteur de la barre associée à la classe $c_1 = [0, 0.01]$.

I.5. Transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi uniforme**Théorème 3.**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \Leftrightarrow Y = (b - a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$$

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto (b - a)x + a$, de telle sorte que $Y = h(X)$. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors $X(\Omega) = [0, 1]$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (h(X))(\Omega) = h(X(\Omega)) = h([0, 1]) \\ &= [h(0), h(1)] = [a, b] \quad (\text{car } h \text{ est continue et} \\ &\quad \text{strictement croissante sur } [0, 1]) \end{aligned}$$

- Déterminons la fonction de répartition de Y , F_Y .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- × Si $x < a$, alors $[Y \leq x] = \emptyset$ car $Y(\Omega) = [a, b]$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

- × Si $x \in [a, b]$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}([(b - a)X + a \leq x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{x - a}{b - a}\right]\right) \\ &= F_X\left(\frac{x - a}{b - a}\right) = \frac{x - a}{b - a} \quad (\text{par définition de } F_X \text{ et} \\ &\quad \text{car } \frac{x - a}{b - a} \in [0, 1]) \end{aligned}$$

× Si $x > b$, alors $[Y \leq x] = \Omega$ car $Y(\Omega) = [a, b]$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([a, b])$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$. \square

Remarque

- On a vu précédemment que l'instruction `rand()` permet de simuler une v.a.r. X suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$. À l'aide de ce théorème on peut simuler une v.a.r. Y qui suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$.

1	<code>a = 3</code>
2	<code>b = 8</code>
3	<code>x = rand()</code>
4	<code>y = (b-a) * x + a</code>

L'instruction `grand(1, 1, "unf", a, b)` peut aussi être utilisée en lieu et place des lignes 3 et 4.

- Ce résultat nous permet de retrouver les valeurs de l'espérance et de la variance d'une v.a.r. Y qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$:

$$\mathbb{E}((b-a)X + a) = (b-a)\mathbb{E}(X) + a = (b-a)\frac{1}{2} + a = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}((b-a)X + a) = (b-a)^2\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Ce théorème peut s'écrire sous la forme :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]) \Leftrightarrow X = \frac{1}{b-a}(Y-a) \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$$

(cette propriété se démontre en appliquant le résultat du théorème à la v.a.r. $X = \frac{1}{b-a}(Y-a)$)

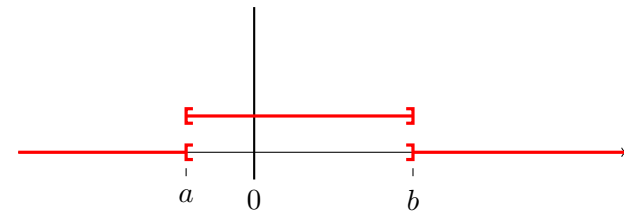
- Cela constitue une manière de procéder assez classique. Imaginons l'étude d'une loi, notée par exemple $\mathcal{L}(a, b)$ à paramètres (a, b) .

- On étudie une loi initialement une v.a.r. X qui suit cette loi avec les paramètres considérés les plus simples. Disons $X \hookrightarrow \mathcal{L}(0, 1)$. On détermine alors $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
- On considère alors une v.a.r. $Y = h_{a,b}(X)$, transformée de la v.a.r. X . On démontre alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{L}(a, b)$. On peut alors déterminer l'espérance et la variance de Y à l'aide de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

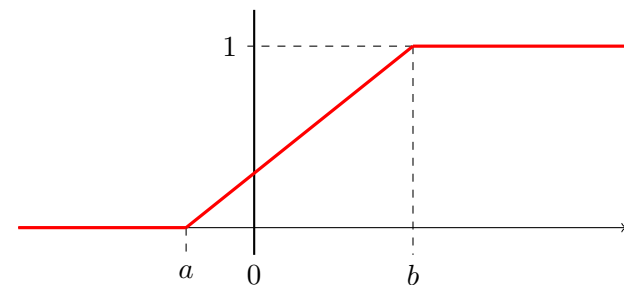
I.6. Représentation graphique

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

- Représentation graphique de la densité f_X .



- Représentation graphique de la fonction de répartition F_X



II. Loi exponentielle

II.1. Densité

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit la **loi exponentielle de paramètre λ** (avec $\lambda > 0$) si :

a) $X(\Omega) = [0, +\infty[$

b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

- On utilisera la notation $X \leftrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ pour signifier que X suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Remarque

On vérifie aisément que f est bien une densité de probabilité :

1) f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

3) • Tout d'abord :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

- La fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^B f(t) dt &= \int_0^B \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^B e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^B \\ &= -e^{-\lambda B} + e^{\lambda 0} = -e^{-\lambda B} + 1 \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

- Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge.

De plus : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

II.2. Fonction de répartition

Théorème 4.

Soit X une v.a.r. telle que $X \leftrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Alors sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

Démonstration.

Faite dans la remarque précédente. □

II.3. Espérance et variance

Théorème 5.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$).

Alors, on a :

1) X admet une espérance. 1) X admet une variance.

$$2) \quad \boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}} \qquad 2) \quad \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment.

• Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} t f_X(t) dt$$

car f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

- La fonction $t \mapsto t f_X(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

On effectue intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = -e^{-\lambda t} & v(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, B]$.

$$\begin{aligned} \text{On obtient : } \int_0^B t \lambda e^{-\lambda t} dt &= [-t e^{-\lambda t}]_0^B + \int_0^B e^{-\lambda t} dt \\ &= -B e^{-\lambda B} + \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^B \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Donc X admet une espérance et

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}}.$$

- La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment.

• Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 f_X(t) dt$$

car f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

- La fonction $t \mapsto t^2 f_X(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = t^2 & u'(t) = 2t \\ v'(t) = -e^{-\lambda t} & v(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, B]$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^B t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt &= [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^B + 2 \int_0^B t e^{-\lambda t} dt \\ &= -B^2 e^{-\lambda B} + \frac{2}{\lambda} \int_0^B t \lambda e^{-\lambda t} dt \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Donc X admet un moment d'ordre 2 et $\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}}$.

- Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huyghens, on obtient :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ainsi : $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$. □

II.4. La seule loi à densité à perte de mémoire

Théorème 6.

Soit X une v.a.r. à densité.

X suit une loi exponentielle si et seulement si :

$$1) \quad X(\Omega) = \mathbb{R}_+$$

$$2) \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}_{[X>s]}([X > s+t]) = \mathbb{P}([X > t])$$

(on dit que la loi exponentielle est sans mémoire)

$$3) \quad \forall s \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}([X > s]) \neq 0$$

Démonstration.

(\Rightarrow) S'il existe $\lambda > 0$ tel que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors :

$$1) \quad X(\Omega) = \mathbb{R}_+ \text{ (par définition),}$$

$$2) \quad \text{Soit } (s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbb{P}_{[X>s]}([X > s+t]) = \frac{\mathbb{P}([X > s] \cap [X > s+t])}{\mathbb{P}([X > s])} = \frac{\mathbb{P}([X > s+t])}{\mathbb{P}([X > s])}$$

En effet, $[X > s+t] \subseteq [X > s]$.

Or on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > s]) &= 1 - \mathbb{P}([X \leq s]) \\ &= 1 - F_X(s) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda s}) \\ &= e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{[X>s]}([X > s+t]) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}([X > t]).$$

$$3) \quad \text{Si } s \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}([X > s]) = e^{-\lambda s} > 0.$$

(\Leftarrow) Ce résultat plus compliqué nécessite de savoir résoudre une équation fonctionnelle. Plus précisément, si G est une fonction $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\left. \begin{aligned} &\bullet \forall (s, t) \in (\mathbb{R}_+)^2, G(s+t) = G(s) G(t) \\ &\bullet G(1) \neq 0 \\ &\bullet G \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, \\ &\forall t \in \mathbb{R}_+, G(t) = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

En notant $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $G(t) = \mathbb{P}([X > t])$ (pour $t \in \mathbb{R}_+$), on démontre que G vérifie les propriétés ci-dessus et ainsi :

$$F_X(t) = \mathbb{P}([X \leq t]) = 1 - \mathbb{P}([X > t]) = 1 - G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

pour un certain $\lambda > 0$. On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle. On en déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. \square

II.5. Transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi exponentielle

Théorème 7.

Soit $\lambda > 0$.

$$1) \quad X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow Y = \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

$$2) \quad Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow Y = \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$$

Démonstration.

1) • Notons $h : x \mapsto \lambda x$, de telle sorte que $Y = h(X)$.

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $X(\Omega) = [0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (h(X))(\Omega) = h(X(\Omega)) = h([0, +\infty[) \\ &= [h(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[= [0, +\infty[\end{aligned}$$

car h est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

• Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

× Si $x < 0$, alors $[Y \leq x] = \emptyset$ car $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× Si $x \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}([\lambda X \leq x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{x}{\lambda}\right]\right) && (\text{car } \lambda > 0) \\ &= F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\lambda \frac{x}{\lambda}} && (\text{car } \frac{x}{\lambda} \geq 0) \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{E}(1)$.

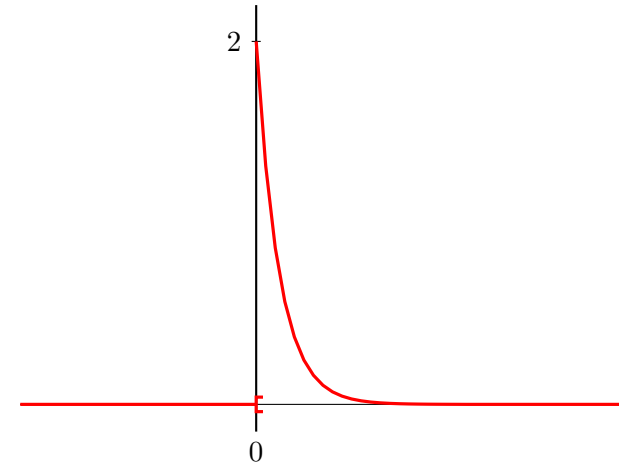
D'où $\lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

On démontre de même les autres implications. □

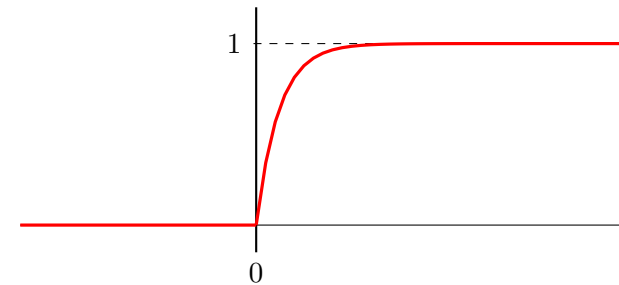
II.6. Représentation graphique

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.

• Représentation graphique de la densité f_X .



• Représentation graphique de la fonction de répartition F_X .



II.7. BONUS : Simulation informatique

II.7.a) Simulation d'une v.a.r. suivant la loi exponentielle

- En **Scilab**, l'instruction `grand(1, 1, "exp", 1/lam)` permet de simuler une v.a.r. qui suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\text{lam})$.
- On peut aussi tirer parti du résultat suivant.

$$U \leftrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \Rightarrow V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \leftrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

On en déduit le programme suivant qui permet de simuler une v.a.r. V suivant la loi $\mathcal{E}(2)$.

```

1 lam = 2
2 u = rand()
3 v = - (1 / lam) * log(1 - u)

```

II.7.b) Vérification de la bonne répartition des valeurs simulées

- Afin de vérifier informatiquement que les valeurs produites par les programmes de simulation sont correctement réparties :
 - × on effectue N appels à la fonction de simulation (avec N grand).
 - × on se fixe un nombre de classes `nbC` et on trace alors l'histogramme des effectifs des classes.
 - × on compare cette histogramme avec une densité de la loi exponentielle.
- Commençons par coder une densité.

```

1 function y = densiteExponentielle(x)
2     if x < 0 then
3         y = 0
4     else
5         y = lam * exp(-lam * x)
6     end
7 endfunction

```

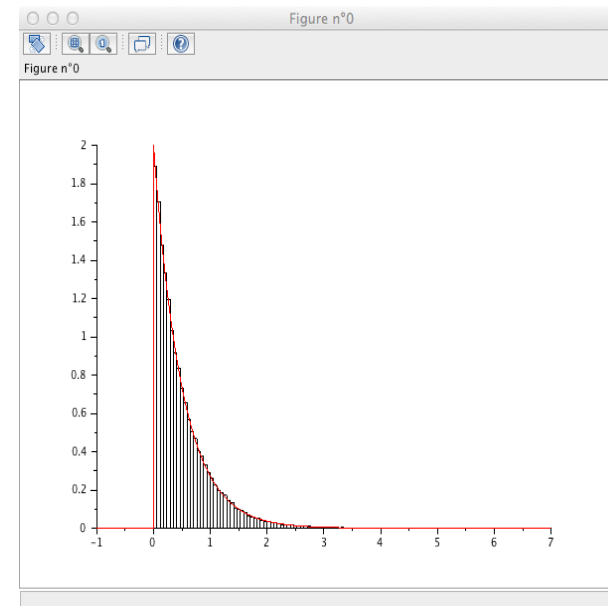
- On met alors en place le programme testant la bonne répartition.

```

1 // Paramètres
2 N = 100 000
3 nbC = 100
4 lam = 2
5
6 // On génère N valeurs par la fonction de simulation
7 Obs = grand(1, N, "exp", 1/lam)
8
9 // Histogramme des effectifs
10 histplot(nbC, Obs)
11 plot(linspace(-1, 7, 8001), densiteExponentielle, "r")

```

On obtient le graphique suivant.



III. Loi normale centrée réduite

III.1. Densité

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit la **loi normale centrée réduite** si :

a) $X(\Omega) =] - \infty, +\infty[$

- b) X admet pour densité la fonction φ définie par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{cases}$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ pour signifier que X suit la loi normale centrée réduite.

Remarque

- On peut vérifier que φ est bien une densité de probabilité :
 - φ est continue sur \mathbb{R} .
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq 0$.
 - $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$ (Admis).
- La fonction φ est paire.
Son graphe sera donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

III.2. Espérance et variance

Théorème 8.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Alors, on a :

- 1) X admet une espérance. 1) X admet une variance.

2) $\mathbb{E}(X) = 0$ 2) $\mathbb{V}(X) = 1$

Démonstration.

- 1) La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment.

- a) Étude de la nature de $\int_0^{+\infty} t \varphi(t) dt$.

- La fonction $t \mapsto t \varphi(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^B t \varphi(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^B t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^B (-t) e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2}t^2} \right]_0^B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}B^2} \right) \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

- On en déduit que $\int_0^{+\infty} t \varphi(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

- b) Étude de la nature de $\int_{-\infty}^0 t \varphi(t) dt$.

On se ramène au cas précédent en posant le changement de variable affine $u = -t$. Plus précisément :

$$\int_{-\infty}^0 t \varphi(t) dt = \int_{+\infty}^0 (\cancel{t}) \varphi(-u)(\cancel{du}) = - \int_0^{+\infty} u \varphi(u) du$$

On en déduit que $\int_{-\infty}^0 t \varphi(t) dt$ converge et vaut $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On en conclut que X admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^0 t \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} t \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

2) La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour ce calcul de moment.

a) Étude de la nature de $\int_0^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt$.

- La fonction $t \mapsto t^2 \varphi(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^B t^2 \varphi(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^B t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^B t \times (-t) e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[te^{-\frac{1}{2}t^2} \right]_0^B - \int_0^B e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right) \\ &\xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En effet, par parité de φ sur \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt &= 2 \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt \\ \parallel & \\ 1 & \end{aligned}$$

- On en déduit que $\int_0^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

b) Étude de la nature de $\int_{-\infty}^0 t^2 \varphi(t) dt$.

En posant le changement de variable $u = -t$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^0 t^2 \varphi(t) dt = \int_{+\infty}^0 (-u)^2 \varphi(-u)(-du) = \int_0^{+\infty} u^2 \varphi(u) du$$

On en conclut que X admet un moment d'ordre 2 et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 t^2 \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - 0 = 1 \quad \square$$

III.3. Fonction de répartition

III.3.a) Définition

La fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite n'admet pas d'expression « simple ». On la note Φ .

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \end{cases}$$

III.3.b) Propriétés remarquables de Φ

Théorème 9.

Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1) La fonction Φ réalise une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur $]0, 1[$.

$$2) \quad \Phi(0) = \mathbb{P}([X \leq 0]) = \frac{1}{2}$$

$$3) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$4) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$$

Démonstration.

- 1) • La fonction φ est continue sur $] -\infty, +\infty[$.
Ainsi, la fonction Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, +\infty[$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$$

On en déduit que la fonction Φ est strictement croissante sur $] -\infty, +\infty[$.

- La fonction Φ est :

× continue sur $] -\infty, +\infty[$,

× strictement croissante sur $] -\infty, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $] -\infty, +\infty[$ sur $\Phi(] -\infty, +\infty[)$. Or :

$$\Phi(] -\infty, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x)[=]0, 1[$$

- 2) • La fonction φ étant une densité de probabilité, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

- On effectue alors le changement de variable $u = -t$:

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad (\text{et donc } t = -u) \\ \Leftrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \bullet t = +\infty \Rightarrow u = -\infty \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\psi : u \mapsto -u$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0]$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt &= \int_0^{-\infty} \varphi(-u)(-du) = -\int_0^{-\infty} \varphi(-u) du \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi(-u) du = \int_{-\infty}^0 \varphi(u) du \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = 2 \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt.$$

On en conclut : $\mathbb{P}([X \leq 0]) = \frac{1}{2}$.

- 3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le même changement de variable $u = -t$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t) dt = -\int_{+\infty}^x \varphi(-u) du \\ &= \int_x^{+\infty} \varphi(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du - \int_{-\infty}^x \varphi(u) du = 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$

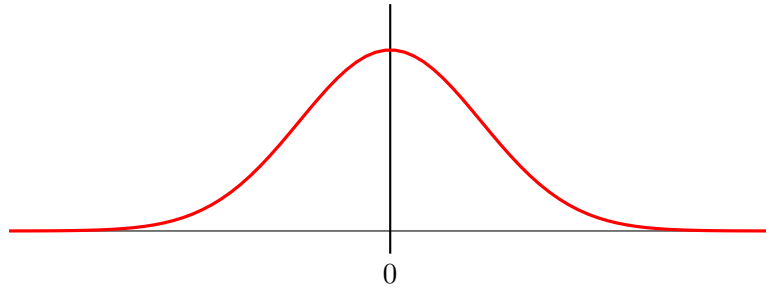
- 4) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| \leq x) &= \mathbb{P}([-x \leq X \leq x]) \\ &= \Phi(x) - \Phi(-x) \\ &= \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1 \quad \square \end{aligned}$$

III.4. Représentation graphique

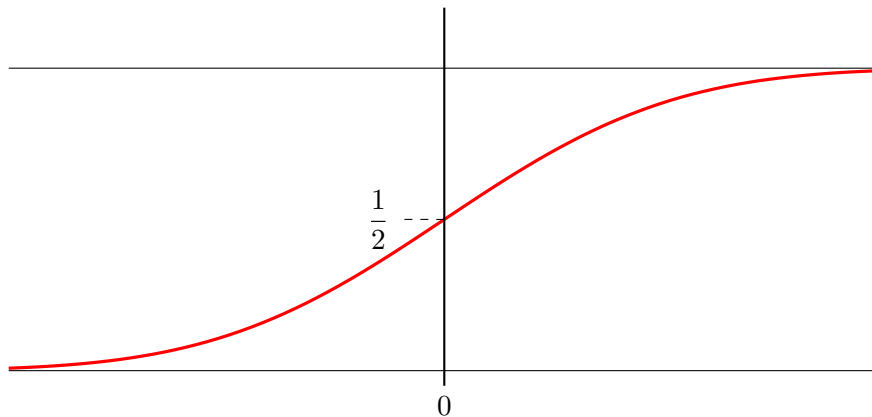
On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

- Représentation graphique de la densité φ .

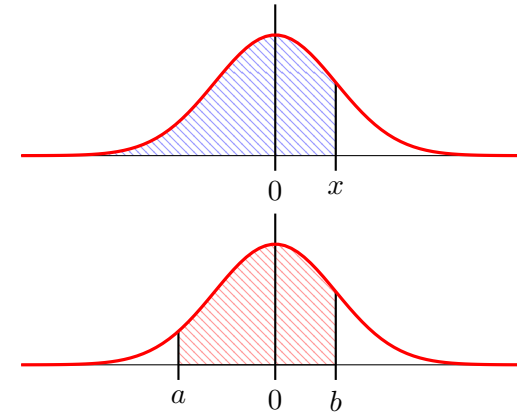


- Représentation graphique de la fonction de répartition Φ .

La fonction Φ n'admet pas d'expression « simple ». Pour autant, on dispose de nombreux éléments permettant d'obtenir une représentation graphique de Φ (strictement croissante, limites connues en $-\infty$ et $+\infty$, dérivée $\Phi' = \varphi$ connue ce qui permet d'obtenir l'existence d'un point d'inflexion et l'équation de la tangente en 0).

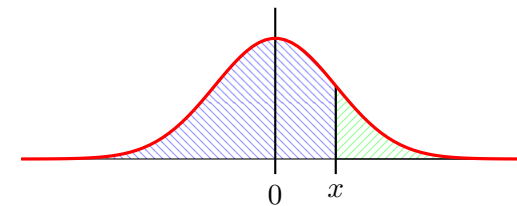


- On peut aussi représenter les valeurs prises par Φ en tirant parti du fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x)$ est l'aire sous la courbe de φ entre $-\infty$ et x .

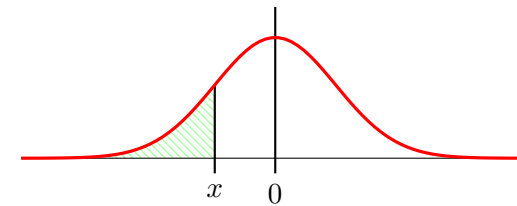


$$\square = \Phi(x) \quad \text{et} \quad \square = \Phi(b) - \Phi(a)$$

- Notons que les résultats concernant Φ et issus de la parité de φ peuvent se lire graphiquement à l'aide de cette représentation d'aire sous la courbe.



$$\square = \Phi(x) \quad \text{et} \quad \square = 1 - \Phi(x)$$



$$\square = \Phi(-x)$$

III.5. Table de la loi normale centrée réduite

On utilise parfois (notamment en statistiques), des tables contenant les valeurs caractéristiques de certaines lois usuelles. La table ci-dessous contient les valeurs de Φ , fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\Phi(t) = \mathbb{P}([X \leq t]) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Fig. 1 Table de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Comment lire les valeurs de cette table ?

- Par exemple, pour lire la valeur de $\Phi(1.64)$

× on sélectionne la ligne 1.6

× on sélectionne alors la colonne 0.04

On lit la valeur de la cellule l'intersection de cette ligne et colonne. On lit : $\Phi(1.64) = 0.9495$

(la probabilité de l'événement $[X \leq 1.64]$ est d'environ 95%)

- Par exemple, pour lire la valeur de $\Phi(-0.81)$

On utilise la formule : $\Phi(-0.81) = 1 - \Phi(0.81)$

On lit alors : $\Phi(-0.81) = 1 - 0.7910 = 0.209$

(la probabilité de l'événement $[X \leq -0.81]$ est d'environ 21%)

IV. Loi normale (ou de Laplace-Gauss)

IV.1. Densité

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit la **loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) de paramètre** (m, σ) (avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$) si :

a) $X(\Omega) =] - \infty, +\infty[$

- b) X admet pour densité la fonction φ_{m, σ^2} définie par :

$$\varphi_{m, \sigma^2} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2} \end{cases}$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour signifier que X suit la loi normale de paramètre (m, σ^2) .

Remarque

- L'expression de φ_{m, σ^2} est proche de celle de φ : on obtient $\varphi_{m, \sigma^2}(x)$ en appliquant à x une transformation affine.

Plus précisément, notons $t : x \mapsto \frac{x-m}{\sigma}$.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_{m, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi(t(x))$.

- On peut se servir de cette propriété pour déduire les propriétés de φ_{m, σ^2} de celle de φ . Par exemple, on peut vérifier que φ_{m, σ^2} est bien une densité de probabilité :

1) φ_{m, σ^2} est \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} comme composée de deux fonctions \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} .

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_{m, \sigma^2}(x) \geq 0$.

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m, \sigma^2}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \varphi(t(x)) dx = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \varphi(u) du$.

La dernière égalité provient du changement de variable $u = \frac{x-m}{\sigma}$.

$$\begin{cases} u = \frac{x-m}{\sigma} & (\text{et donc } x = \sigma u + m) \\ \hookrightarrow du = \frac{1}{\sigma} dx & \text{et } dx = \sigma du \\ \bullet x = -\infty \Rightarrow u = -\infty \\ \bullet x = +\infty \Rightarrow u = +\infty \end{cases}$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\psi : u \mapsto \sigma u + m$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, +\infty[$.

IV.2. Transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi normale

Théorème 10.

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

On a alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Démonstration.

Notons $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$.

(\Rightarrow) Remarquons tout d'abord : $X^* = \frac{1}{\sigma} X - \frac{m}{\sigma}$. Notons $a = \frac{1}{\sigma}$ et $b = -\frac{m}{\sigma}$.

Alors $X^* = aX + b$ est une transformée affine de X . On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la densité de probabilité f_{X^*} vérifie :

$$\begin{aligned} f_{X^*}(x) &= \frac{1}{|a|} \varphi_{m, \sigma^2} \left(\frac{x-b}{a} \right) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma}} \varphi_{m, \sigma^2} \left(\frac{x + \frac{m}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}} \right) = \sigma \cdot \varphi_{m, \sigma^2}(\sigma x + m) \\ &= \sigma \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(\sigma x + m) - m}{\sigma} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} \end{aligned}$$

On reconnaît une densité de probabilité de la loi normale centrée réduite. Ainsi : $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

(\Leftarrow) On se sert ici du fait que X apparaît comme transformée affine de la v.a.r. X^* . En effet : $X = \sigma X^* + m$ ($X = aX^* + b$ avec $a = \sigma$ et $b = m$). On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la densité de probabilité f_X vérifie :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{|a|} f_{X^*} \left(\frac{x-b}{a} \right) = \frac{1}{\sigma} f_{X^*} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2} \end{aligned}$$

On reconnaît une densité de probabilité de la loi normale de paramètre (m, σ^2) . Ainsi : $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. \square

IV.3. Espérance et variance

Théorème 11.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Alors, on a :

1) X admet une espérance. 1) X admet une variance.

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = m}$

2) $\boxed{\mathbb{V}(X) = \sigma^2}$

Démonstration.

Il y a deux manières de faire cette démonstration.

- La manière directe consiste à étudier $\int_{-\infty}^{+\infty} t \varphi_{m, \sigma^2}(t) dt$ (bon exercice).
- La seconde manière est plus élégante. Elle consiste à utiliser le théorème précédent. Notons $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$. On a alors $X = \sigma X^* + m$.

Par la linéarité (faible) de l'espérance, la v.a.r. X^* admet une espérance donnée par : $\mathbb{E}(X) = \sigma \mathbb{E}(X^*) + m = \sigma \times 0 + m = m$.

(de même, $\mathbb{V}(X) = \sigma^2 \mathbb{V}(X^*) = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2$) \square

Remarque

- Ce théorème permet de comprendre les notations m et σ . Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$. Ainsi :
 - × La notation m peut-être lue comme « moyenne ».
 - × La notation σ est celle que nous avons déjà utilisé pour l'écart type.
- La loi normale centrée réduite est simplement une loi normale particulière : celle dont les paramètres (m, σ^2) vérifient $m = 0$ et $\sigma = 1$.
- Évidemment, on a :

$$\left. \begin{aligned} &\bullet X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \\ &\bullet \mathbb{E}(X) = 0 \\ &\bullet \mathbb{V}(X) = 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Autrement dit, la loi normale centrée réduite est donc la loi des v.a.r. X qui suivent une loi normale ($X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$) et qui sont centrées ($\mathbb{E}(X) = 0$) et réduites ($\mathbb{V}(X) = 1$).

À RETENIR

- On retiendra que la transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi normale (de paramètres quelconques) suit une loi normale.
- Plus précisément, si $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2 \sigma^2)$$

Partant de X v.a.r. tel que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, la v.a.r. $Y = aX + b$ suit une loi normale. Ses caractéristiques s'obtiennent en calculant :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX + b) = a \mathbb{E}(X) + b = am + b$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X) = a^2 \sigma^2$$

Exercice

On suppose que Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(7, 16)$.

1. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}([Y < 7])$ et $\mathbb{P}([Y \leq 12, 12])$.

2. a) Déterminer le seuil x tel que : $\mathbb{P}([Y \leq x]) = 0,9162$.

b) Déterminer le seuil y tel que $\mathbb{P}([Y > y]) = 0,9418$.

Démonstration.

Tout d'abord $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(7, 16)$. Ainsi $Y^* = \frac{Y - 7}{4} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

(attention : $\sigma^2 = 16$ donc $\sigma = 4$)

On note Φ la fonction de répartition de Y^* .

1. D'après la table de la loi normale centrée réduite, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{P}([Y < 7]) &= \mathbb{P}([Y - 7 < 7 - 7]) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{Y - 7}{4} < \frac{0}{4}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([Y^* < 0]) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{P}([Y \leq 12, 12]) &= \mathbb{P}\left(\left[Y^* \leq \frac{12, 12 - 7}{4}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[Y^* \leq \frac{5, 12}{4}\right]\right) \\ &= \Phi(1, 28) = 0,8997 \end{aligned}$$

2. a) Remarquons tout d'abord que :

$$\mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}\left(\left[Y^* \leq \frac{x - 7}{4}\right]\right) = \Phi\left(\frac{x - 7}{4}\right) = 0,9162$$

Par lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on trouve $\Phi(1, 38) = 0,9162$. On a alors :

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{x - 7}{4}\right) = \Phi(1, 38) &\Leftrightarrow \frac{x - 7}{4} = 1,38 \quad (\text{car } \Phi \text{ est} \\ &\quad \text{bijective sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x = 4 \times 1,38 + 7 = 12,52 \end{aligned}$$

Ainsi, 12,52 est donc le seuil recherché.

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathbb{P}([Y > y]) &= \mathbb{P}\left(\left[Y^* > \frac{y - 7}{4}\right]\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{y - 7}{4}\right) = \Phi\left(-\frac{y - 7}{4}\right) = \Phi\left(\frac{7 - y}{4}\right) \end{aligned}$$

d'après les propriétés de la fonction Φ .

Nous cherchons donc y tel que $\Phi\left(\frac{7 - y}{4}\right) = 0,9418$.

Par lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on trouve $\Phi(1, 57) = 0,9418$.

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{7 - y}{4}\right) = \Phi(1, 57) &\Leftrightarrow \frac{7 - y}{4} = 1,57 \quad (\text{car } \Phi \text{ est} \\ &\quad \text{bijective sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow y = 7 - 4 \times 1,57 = 0,72 \end{aligned}$$

Ainsi, 0,72 est donc le seuil recherché. \square

IV.4. Stabilité par somme des lois normales**Théorème 12.**

Soit $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Soit X_1 une v.a.r. telle que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$.

Soit X_2 une v.a.r. telle que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$.

On suppose de plus que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Généralisation :

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes.

On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^* : X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

Alors $X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$.

Démonstration.

Hors programme.

L'exercice 20 du TD illustre la technique permettant d'obtenir la loi d'une somme de v.a.r. à densité indépendantes. \square

IV.5. Représentation graphique

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Une densité d'une telle loi est représentée par une courbe en cloche.

- × Dans le cas d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, cette cloche est centrée en 0.
- × Dans le cas d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, cette cloche est centrée en m .

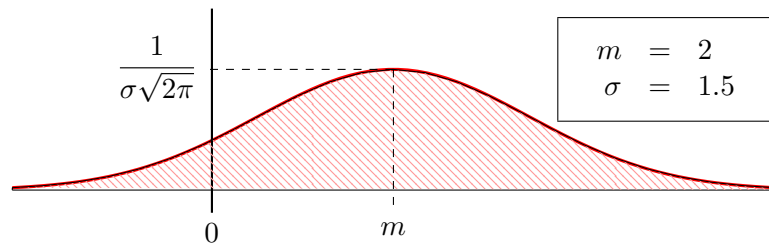
D'autre part, la forme de cette cloche (hauteur et largeur) dépend de σ :

- × plus σ est petit, plus le pic est haut et fin ;
- × plus σ est grand, plus le pic est bas et large.

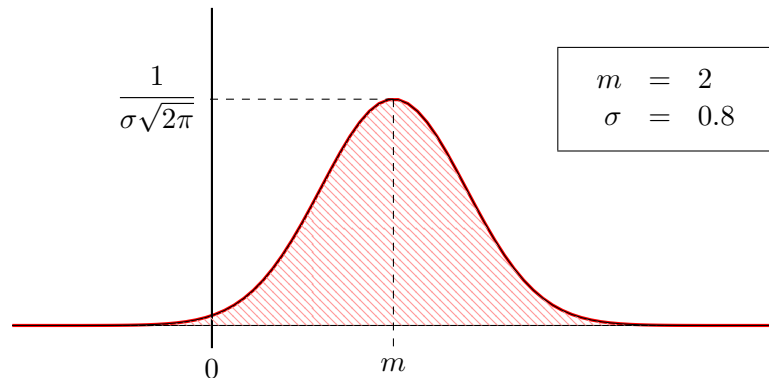
Notez que l'aire sous la courbe entre $-\infty$ et $+\infty$ est invariante (on a toujours

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m,\sigma}(t) dt = 1).$$

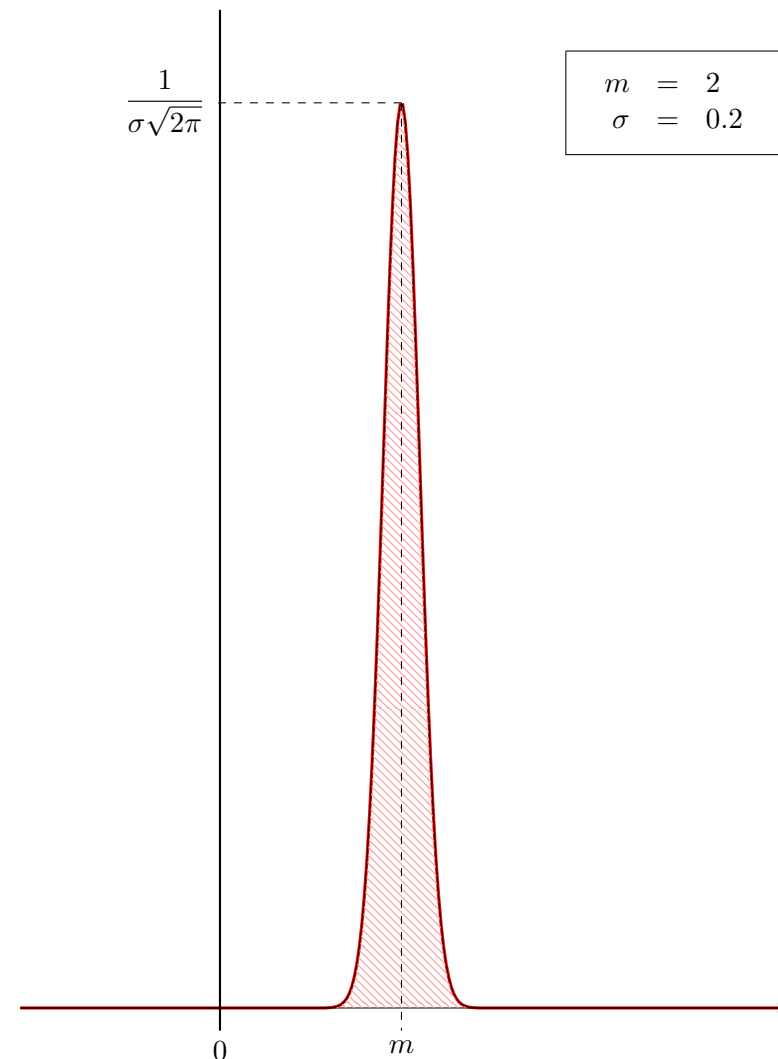
- Représentation graphique d'une densité φ_{m,σ^2} de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.



- Représentation graphique de la densité φ_{m,σ^2} de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.



- Représentation graphique de la densité φ_{m,σ^2} de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.



- Représentation graphique de la fonction de répartition Φ_{m,σ^2}

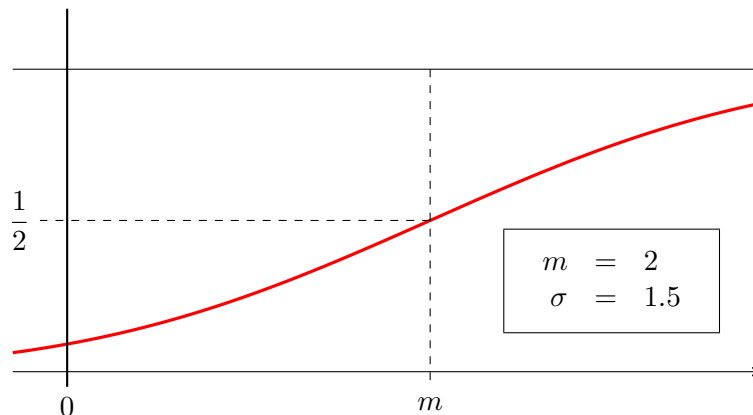
Rappelons tout d'abord :

$$\Phi_{m,\sigma^2} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt \end{cases}$$

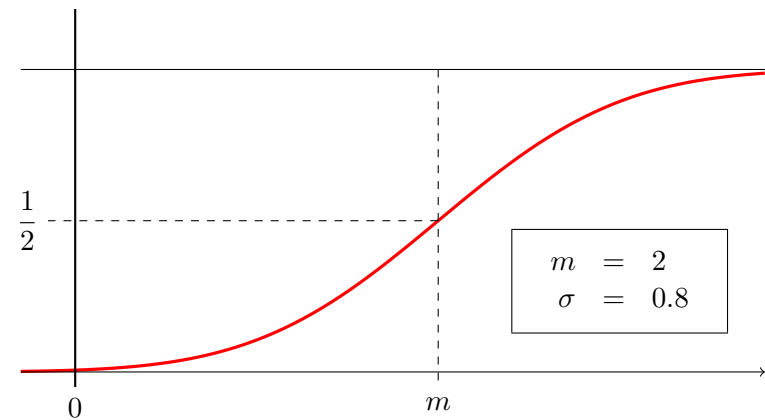
En posant le changement de variable $u = \frac{t-m}{\sigma}$, on démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{m,\sigma^2}(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} (\sigma du) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

× Dans le cas où $m = 2$ et $\sigma = 1,5$.



× Dans le cas où $m = 2$ et $\sigma = 0,8$.



× Dans le cas où $m = 2$ et $\sigma = 0,2$.

