CH XI : Variables aléatoires réelles à densité

Généralités sur les v.a.r. à densité

I. Les v.a.r. à densité

I.1. Définition

Définition

Soit X une v.a.r. .

- On dit que la v.a.r. X **est une v.a.r. à densité** si sa fonction de répartition F_X est :
  a) continue sur $\mathbb{R}$,
  b) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.

Remarque

- Démontrer qu'une v.a.r. X est à densité c'est donc montrer la régularité d'une fonction (à savoir F_X).
- Dire qu'une fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini n de points signifie qu'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
  (on considère que les points sont ordonnés : $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$)
  la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, x_1[$, $]x_n, +\infty[$ et sur tout $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$
  i.e. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, x_1[\cup]x_1, x_2[\cup \cdots \cup]x_{n-1}, x_n[\cup]x_n, +\infty[$.
- Il faut faire attention : si X admet une densité alors F_X n'est (éventuellement) pas de classe $\mathcal{C}^1$ en les x_i mais est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
  La fonction F_X est donc notamment continue en les x_i.

I.2. Rappels sur les fonctions de répartition

I.2.a) Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r.

- On appelle **fonction de répartition de** X et on note F_X l'application :

$$\boxed{F_X : \left|\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \mapsto & F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array}\right.}$$

I.2.b) Caractérisations des fonctions de répartition

Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r.

La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.

2) *La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.*

3) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1}$

4) *La fonction F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.*

Autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)}$

5) *La fonction F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])}$$

Remarque

- Les points *2.*, *3.* et *4.* caractérisent les fonctions de répartition. Autrement dit, une fonction F qui vérifie ces 3 points peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. X.

I.2.c) Continuité d'une fonction de répartition

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r.

$$\boxed{F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P}([X = x]) = 0}$$

Démonstration.
Par définition :

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x) = \lim_{t \to x^-} F_X(t)$$

Or, comme vu dans le théorème précédent : $\lim\limits_{t \to x^-} F_X(t) = \mathbb{P}([X < x])$.
De plus, $\mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x])$.
(puisque $[X \leqslant x] \ = \ [X < x] \cup [X = x]$ et que $\mathbb{P}$ est additive)

Ainsi, $F_X(x) = \lim\limits_{t \to x^-} F_X(t)$ signifie que :

$$\mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$

ce qui équivaut à : $\mathbb{P}([X = x]) = 0$. □

Remarque
Si X est un v.a.r. à densité, sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ tout en entier. On a ainsi :

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ est à densité } \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P}\big([X = x]\big) = 0}$$

I.2.d) Propriété des fonctions de répartition

Théorème 3.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$.

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a)}$$

Remarque

- De manière générale :

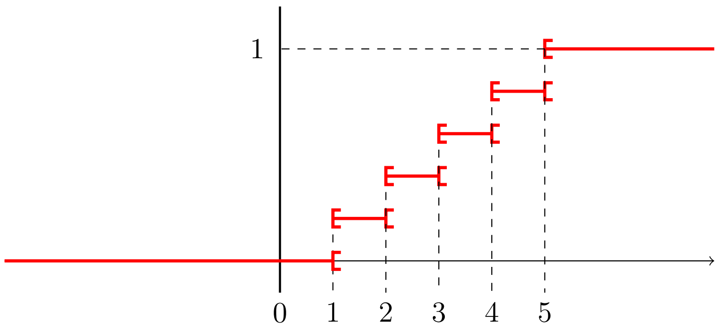
$$\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}([X = a])$$

- Si X est une v.a.r. à densité, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([a < X < b]) &= \mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leqslant X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b]) \ = \ F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

I.3. Toutes les v.a.r. ne sont pas à densité

Exemple
Une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 5 \rrbracket)$ est-elle une densité ?
Rappelons la fonction de répartition d'une telle v.a.r.



- Ici, F_X est bien $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[\, \cup\,]1, 2[\, \cup\,]2, 3[\, \cup\,]3, 4[\, \cup\,]4, 5[\, \cup\,]5, +\infty[$.
- Par contre, F_X n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car non continue en les x_i.

Ainsi, si une v.a.r. **discrète finie** suit une loi uniforme, alors X n'admet pas de densité.

Remarque

- On rappelle que la forme en escalier est caractéristique des fonctions de répartition des v.a.r. discrètes. La hauteur des contremarches est égale aux valeurs successives des $\mathbb{P}([X = x])$, pour $x \in X(\Omega)$.
- Rappelons alors que : F_X est continue en $x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \mathbb{P}([X = x]) = 0$.
  Cela permet de tirer la conclusion suivante :

$$\boxed{X \text{ est une v.a.r. discrète} \quad \Rightarrow \quad X \text{ n'admet pas de densité}}$$

- Une v.a.r. ne peut être à la fois discrète et à densité. L'ensemble de v.a.r. discrètes et l'ensemble des v.a.r. à densité est d'intersection vide. Pour autant, ces deux ensembles ne forment pas une partition de l'ensemble des v.a.r. : il exsite des v.a.r. qui sont ni discrète, ni à densité.

Exercice

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \max(1, X)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y.

2. Représenter graphiquement cette fonction de répartition.

3. Y est-elle une v.a.r. à densité ?

Démonstration.

1. • Notons $h : x \mapsto \max(1, x)$, de sorte que $Y = f(X)$.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $X(\Omega) =]0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \\ & = & h(]0, +\infty[) \ \subset \ [1, +\infty[\qquad \textit{(par définition de } h\textit{)} \end{array}$$

Donc $Y(\Omega) \subset [1, +\infty[$.

• Déterminons la fonction de répartition de Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset [1, +\infty[$. On a alors :

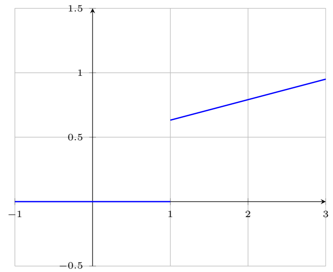
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \geqslant 1$, on a :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([\max(1, X) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([1 \leqslant x] \cap [X \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) & \textit{(car } [1 \leqslant x] = \Omega \textit{ si } x \geqslant 1\textit{)} \\ & = & F_X(x) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \end{array}$$

Finalement, $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

2. La fonction F_Y admet la représentation graphique suivante.



3. La fonction de répartiton de Y, F_Y n'est pas continue en 1.
Donc Y n'est pas une v.a.r. à densité.

□

II. Densité d'une v.a.r.

II.1. Définition

Définition

Soit X une v.a.r. à densité.

On dit qu'une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **une densité de** X si :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_X(x) \geqslant 0,$

b) La fonction f_X coïncide avec F_X' sauf en un nombre fini de points.
Autrement dit, il existe $\{x_1, \dots, x_n\}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}, \quad f_X(x) \ = \ F_X'(x)$$

Remarque

- Pour faciliter les écritures, et sans perte de généralité, on notera les points $\{x_1, \dots, x_n\}$ de manière ordonnée *i.e.* tel que :

$$x_1 \ < \ \dots \ < \ x_n$$

- D'où vient le caractère positif de f_X ?
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_X(x) = F_X'(x)$ pour tout $x \in]x_1, x_2[$.
Comme F_X est une fonction de répartition, elle est croissante sur $\mathbb{R}$ (et donc a fortiori sur $]x_1, x_2[$). Or on a :

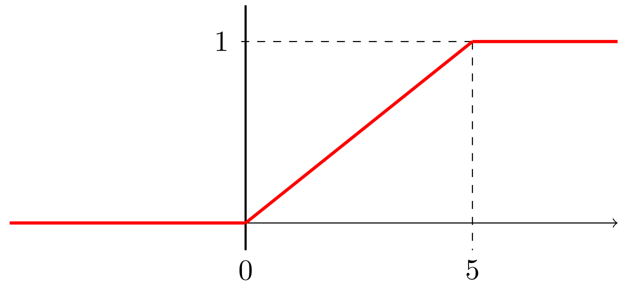
$$F_X \text{ croissante sur }]x_1, x_2[\quad \Leftrightarrow \quad F_X' = f_X \geqslant 0 \text{ sur }]x_1, x_2[$$

On montre ainsi que : $f_X \ \geqslant \ 0$ sur $]x_1, x_2[\ \cup \ \dots \ \cup \ ]x_{n-1}, x_n[$.

- De par la définition, si X admet une densité, alors X admet une infinité de densité. En effet, la définition ne contraint pas précisément la valeur de f_X en les x_i. La seule exigence est que $f_X(x_i) \geqslant 0$.

Exemple

Considérons une v.a.r. X dont la fonction de répartition F est la suivante.



Cela correspond à la fonction $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x/5 & \text{si } x \in [0, 5] \\ 1 & \text{si } x \in]5, +\infty[\end{cases}$

- Tout d'abord, remarquons que cette fonction vérifie bien les propriétés caractéristiques des fonctions de répartitions.
  - × F est croissante sur $\mathbb{R}$,
  - × $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
  - × F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- De plus, la v.a.r. X est bien une v.a.r. à densité puisque :
  1) F est continue sur $\mathbb{R}$,
  2) F est de classe $\mathcal{C}^1$ (même C^∞) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 5[$, $]5, +\infty[$ car polynomiale.
- Pour déterminer **une** densité de X, on commence par dériver la fonction F sur les intervalles **<u>ouverts</u>** $]-\infty, 0[$, $]0, 5[$, $]5, +\infty[$.

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1/5 & \text{si } x \in]0, 5[\\ 0 & \text{si } x \in]5, +\infty[\end{cases}$$

En choisissant la valeur (forcément positive) de f en 0 et 5, on définit une densité de X. Par exemple, on peut prendre $f(0) = 1/5 = f(5)$.
Mais on pourrait tout autant choisir $f(0) = 32$ et $f(5) = \frac{13\sqrt{2}}{\mathrm{e}^3}$.

II.2. Expression de la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité

Théorème 4.

Soit X une v.a.r. admettant une densité notée f_X.
Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1) *La fonction* $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *en tout point où* f *est continue.*

De plus : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt}$

et, en tout point où f *est continue,* $F'(x) = f(x)$*. Plus généralement :*

× *si* f *est continue à droite en* x, F_X *est dérivable à droite en* x.

× *si* f *est continue à gauche en* x, F_X *est dérivable à gauche en* x.

2) $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt = 1}$ *3)* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = 0}$

4) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, *on a :* $\boxed{\mathbb{P}([X < a]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant a]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\ dt}$

$$\boxed{\mathbb{P}([X > b]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant b]) \ = \ \int_{b}^{+\infty} f_X(t)\ dt}$$

5) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, *si* $a \leqslant b$, *on a :*

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \ = \ F_X(b) - F_X(a) \ = \ \int_{a}^{b} f_X(t)\ dt}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X < b]) = \mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X < b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])}$$

Remarque

- Ce théorème illustre l'intérêt des v.a.r. à densité : on obtient la valeur de la fonction de répartition F_X et donc la loi de X sous forme d'un calcul d'intégrales (éventuellement impropres).
- On peut faire l'analogie avec le chapitre sur les v.a.r. discrètes.

	Cas discret (v.a.r. discrète)	Cas continu (v.a.r. à densité)
$\mathbb{P}([X \leqslant b])$	$\displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leqslant b}} \mathbb{P}([X = x])$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f_X(t)\ dt$
$\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ *(avec $a \leqslant b$)*	$\displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ a \leqslant x \leqslant b}} \mathbb{P}([X = x])$	$\displaystyle\int_{a}^{b} f_X(t)\ dt$
$\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ *(avec $a \leqslant b$)*	$F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}([X = a])$	$F_X(b) - F_X(a)$
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$	$\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt = 1$
Régularité de F_X	En tout point $x \in \mathbb{R}$: • F_X continue à droite en x • F_X admet une limite finie à gauche en x	F_X continue sur $\mathbb{R}$

II.3. Démontrer qu'une fonction est une densité

Théorème 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est une densité de probabilité	$\Leftrightarrow$	**1.** *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points,* **2.** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$, **3.** *L'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ *est convergente et vaut* 1.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Si f est une densité de probabilité alors :

- × par définition, $f = F_X'$ (pour une certaine v.a.r. X) sauf en un nombre fini de points. Or F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points donc F_X' est de classe $\mathcal{C}^0$ sauf en un nombre fini de points.
- × la fonction f est positive par définition.
- × enfin $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$ a été démontré dans le théorème précédent.

($\Leftarrow$) Admis.

□

Remarque

Il y a essentiellement deux grands types d'exercices sur les v.a.r. à densité.
À DÉVELOPPER.

Exemple
On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

a. Montrer que f est une densité de probabilité et tracer son graphe.

b. Soit X une variable aléatoire de densité f. Expliciter F_X.

c. Calculer $\mathbb{P}\left(\left[X > \dfrac{1}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \dfrac{1}{3}\right]\right)$.

Démonstration.

a. D'après le théorème précédent, il s'agit de démontrer que f vérifie trois propriétés.

1. La fonction f est continue sur $]-\infty,-1[$, sur $]-1,0[$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. Par exemple, si $x \in [-1,0[$, alors $0 \leqslant 1+x < 1$ et donc $f(x) \geqslant 0$ si $x \in [-1,0[$.

3. Notons $U(y) = \displaystyle\int_y^0$ pour $y \leqslant -1$. On a alors :

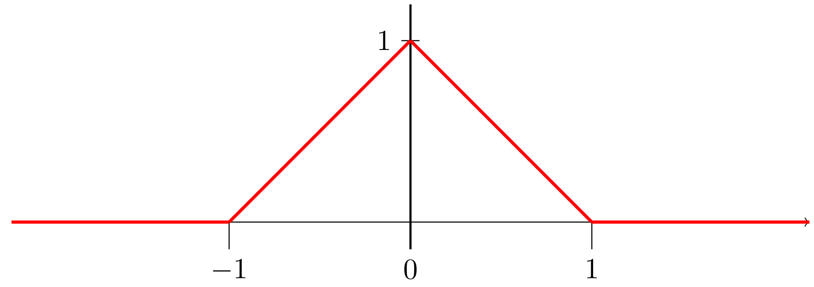
$$\begin{aligned} \int_y^0 f(t)\,dt &= \int_y^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^0 f(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^0 f(t)\,dt \;=\; \int_{-1}^0 (1+t)\,dt \;=\; \left[\, t + \frac{t^2}{2} \,\right]_{-1}^{0} \\ &= -\left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right) \;=\; \frac{1}{2} \;\underset{y\to-\infty}{\longrightarrow}\; \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

On démontre de même que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

$$\int_0^1 f(t)\,dt \;=\; \int_0^1 (1-t)\,dt \;=\; \int_0^{-1} (1+u)\,(-du) \;=\; \int_{-1}^0 f(u)\,du$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.



b. La densité de probabilité f étant définie par cas, il en est (a priori) de même pour F_X. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quatre cas se présentent.

× Si $x < -1$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^x 0\,dt = 0$.

× Si $-1 \leqslant x < 0$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^x (1+t)\,dt$

Or : $\displaystyle\int_{-1}^x (1+t)\,dt = \left[\, t + \frac{t^2}{2} \,\right]_{-1}^{x} = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right)$

et donc $F_X(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

× Si $0 \leqslant x < 1$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^0 (1+t)\,dt + \int_0^x (1-t)\,dt$

Or : $\displaystyle\int_0^x (1-t)\,dt = \left[\, t - \frac{t^2}{2} \,\right]_0^x = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 (1+t)\,dt = \frac{1}{2}$

et donc $F_X(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

× Si $x \geqslant 1$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^1 f(t)\,dt + \int_1^x 0\,dt$

et donc $F_X(x) = 1$.

c. Il y a deux manières de rédiger cette question :

- $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)\ dt + \int_{1}^{+\infty} 0\ dt$

  Or : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)\ dt = \left[\ t - \frac{t^2}{2}\ \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2}\right) = \frac{1}{8}$

- $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

  car $F_X\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

On peut aussi utiliser l'une ou l'autre de ces rédactions pour la question suivante :

- $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(t)\ dt = 2\int_{0}^{\frac{1}{3}} f(t)\ dt$

  par parité. Or : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}} (1-t)\ dt = \left[\ t - \frac{t^2}{2}\ \right]_{0}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$

- $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = F_X\left(\frac{1}{3}\right) - F_X\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$

  car $F_X\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{(\frac{1}{3})^2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{9}$

  et $F_X\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{(-\frac{1}{3})^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$

$\square$

III. Transformation d'une v.a.r. à densité

III.1. Transformation affine d'une v.a.r. à densité

Théorème 6.

Soit X une v.a.r. à densité f_X.

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

1) La var $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.

2) De plus, sa densité est donnée par $\boxed{f_Y : x \mapsto \frac{1}{|a|} \ f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)}$

Démonstration.
Notons Y la v.a.r. définie par $Y = aX + b$. Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([aX + b \leqslant x]) = \mathbb{P}([aX \leqslant x - b])$$

On doit alors distinguer deux cas :

1) Si $a > 0$, alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x-b}{a}\right]\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$

2) Si $a < 0$, alors :

$$\begin{array}{rcl} F_Y(x) & = & \mathbb{P}\left(\left[X \geqslant \frac{x-b}{a}\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[X < \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ & = & 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{array}$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{x-b}{a}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction F_X étant la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité, on sait que F_X est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. Par composition, on en déduit que F_Y est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. On en déduit que Y est une v.a.r. à densité.

Déterminons une densité de Y.

1) Si $a > 0$, alors : $F_Y'(x) = \frac{1}{a} \ F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} \ f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$

2) Si $a < 0$, alors : $F_Y'(x) = -\frac{1}{a} \ F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = -\frac{1}{a} \ f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$

On en conclut qu'une densité de Y est donnée par : $x \mapsto \frac{1}{|a|} \ f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$. □

Remarque

- Peut-on généraliser cette propriété : si X et Y sont des variables à densité, la v.a.r. $X + Y$ est-elle à densité ?

  `NON !` on peut par exemple considérer :

  × une v.a.r. X suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (définition à suivre),

  × et la v.a.r. Y donnée par $Y = 1 - X$.

  Alors $X + Y = 1$, ce qui montre que $X(\Omega) = \{1\}$.
  Ainsi, $X + Y$ n'admet pas de densité en tant que v.a.r. discrète (finie).
- L'ensemble des v.a.r. à densité n'est donc pas stable par addition.
  De ce fait, ce n'est pas un espace vectoriel.

Exercice

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.
On note $Y = 2X + 1$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

2. La v.a.r. Y est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.

III.2. Transformation polynomiale (carré)

Théorème 7.

Soit X une v.a.r. à densité f_X.

1) *La var $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité.*

2) *De plus, sa densité est donnée par :*

$$\boxed{f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Démonstration.
La démonstration est analogue à la démonstration précédente.

- Si $x < 0$: $[Y \leqslant x] = \left[X^2 \leqslant x\right] = \varnothing$,

  et alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$: $[Y \leqslant x] = \left[X^2 \leqslant x\right] = [-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]$.

  et alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$.

La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ (car constante sur cet intervalle).
Sur $]0, +\infty[$, F_Y est obtenue comme composée de la fonction F_X qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points. Enfin, en tout point $x > 0$ où F_Y est dérivable, on a :

$$\begin{aligned} F'_Y(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, F'_X(\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\, F'_X(-\sqrt{x})\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, f_X(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\, f_X(-\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) \end{aligned}$$

et $F'_Y(x) = 0$ pour tout $x < 0$. □

Exercice
Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$.
Notons $Y = X^2$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

2. La v.a.r. Y est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.

III.3. Une transformation usuelle

Exercice
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$.

Quelle est la loi de $Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-X)$?

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-x)$, de sorte que $Y = h(X)$.
  Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors $X(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \ = \ h\big([0,1[\big) & \\ & = & \Big[h(0), \lim\limits_{x\to 1} h(x)\Big[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\ (*)\textit{)} \\ & = & [0,+\infty[& \end{array}$$

  Ainsi : $Y(\Omega) = [0,+\infty[$.
  On peut démontrer $(*)$ par une rapide étude de fonction :
  - × la fonction h est dérivable (donc continue) sur $[0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats.
  - × soit $x \in\ ]0,1[$.

$$h'(x) \ = \ -\frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{1-x}\right) \ = \ \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$

  Donc la fonction h est strictement croissante sur $[0,1[$.

- Déterminons la fonction de répartition de Y.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  - × Si $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-X) \geqslant -\lambda x]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-X \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \\ & = & F_X\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

  $$\begin{array}{lrl} \text{En effet, comme} & x \geqslant 0 & \\ \text{alors} & -\lambda x \leqslant 0 & \\ \text{d'où} & 0 < \mathrm{e}^{-\lambda x} \leqslant 1 & \textit{(car } \exp \textit{ est croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{et donc} & 0 \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} < 1 & \end{array}$$

Finalement : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\ ]-\infty,0[\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. . Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □

Remarque
La fonction h réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$. La méthode développée ici consiste à déterminer, étape par étape, la bijection réciproque de h *i.e.* la fonction $h^{-1} : [0,1[\to [0,+\infty[$. Pour $x \in [0,+\infty[$:

$$F_Y(x) = \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[h(X) \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,\big[X \leqslant h^{-1}(x)\big]\,\big)$$

Il n'est donc pas étonnant que $h^{-1}(x) \in [0,1[$. C'est une conséquence directe de la méthode (dite d'inversion - *cf* TP) développée dans cet exercice.

III.4. D'autres techniques à connaître

III.4.a) Loi de la valeur absolue d'une v.a.r. à densité

Exercice
Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[-2, 2]$.
La variable X admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [-2,2] \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Y = |X|$.
La variable aléatoire Y admet-elle une densité ?
Si oui, déterminer une densité de Y.

3. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Z = X + Y$.
On pourra considérer le système complet d'événements $([X < 0], [X \geqslant 0])$.
La v.a.r. Z admet-elle une densité ? Si oui, déterminer une densité de Z.

III.4.b) Loi de la partie entière d'une v.a.r. à densité

Exercice *(d'après* `EDHEC 2002`*)*
Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière par défaut de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Soit $\lambda > 0$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
On pose $Y = \lfloor X \rfloor$.
On a donc : $\forall k \in \mathbb{Z},\ [Y = k] = [k \leqslant X < k+1]$.

1. ***a)*** Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}([Y = k-1])$.

c) En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d) Donner l'espérance et la variance de $Y+1$.
En déduire l'espérance et la variance de Y.

2. On pose $Z = X - Y$.

a) Déterminer $Z(\Omega)$.

b) En utilisant le système complet d'événements $\big([Y = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer :

$$\forall x \in [0,1[\,,\ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

c) En déduire une densité f de Z.

III.4.c) Loi du min / max

Exercice
Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 2$.
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes, de densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in\ [1, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in\ ]-\infty, 1[\end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X_1.

3. Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X_1)$ et de $\mathbb{V}(X_1)$.

4. On pose $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Z = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Vérifier que Y et Z sont des variables aléatoires réelles à densité, puis déterminer une densité de Y et une densité de Z.
Étudier l'existence des espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$ de Y et Z, et les calculer lorsqu'elles existent.

III.4.d) Loi de la somme de deux v.a.r. à densité

Exercice *(d'après* `HEC 2010`*)*
Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la v.a.r. $U + V$ est à denisté à condition que la fonction f_{U+V} suivante existe. Cette fonction f_{U+V} définit alors une densité de $U + V$.

$$f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) \; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_U(x-t) \; dt$$

1. Montrer que la variable aléatoire $-Y$ est à densité et en déterminer une densité.

2. En déduire, en séparant les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$, que la variable $Z = X - Y$ admet pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda |x|}$$

3. Démontrer que la variable aléatoire $T = |Z|$ est à densité et en déterminer une densité.

IV. Espérance d'une v.a.r. à densité

IV.1. Définition

Définition

Soit X une v.a.r. de densité f_X.

- On dit que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_X(x)\ dx$ est absolument convergente.
- Dans ce cas, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_X(x)\ dx}$

Remarque

- Il faut bien comprendre que, même si la notation est la même que précédemment ($\mathbb{E}(X)$), nous venons de définir un nouvel opérateur qui agit sur les v.a.r. à densité et plus sur les v.a.r. discrètes.
- Il n'y a donc pas de raison pour que les propriétés classiques de l'opérateur espérance des v.a.r. discrètes soient vérifiées pour l'opérateur espérance des v.a.r. à densité.
- Une propriété aussi simple que la linéarité et notamment l'égalité :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

  est problématique. En effet, on a vu que même si X et Y sont à densité, $X+Y$ ne l'est pas forcément. Il faut donc se demander ce que représente les différents symboles $\mathbb{E}$ de cette égalité ...
- En fait, il existe une théorie permettant d'unifier sous une même écriture le cas discret et le cas continu. Toutefois, c'est hors de notre portée et nous n'en dirons donc pas plus.

Méthode.

Soit X une v.a.r. de densité f.

$$X \text{ admet une espérance} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textit{1)} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\ f(t)\ dt \text{ est convergente} \\ \textit{2)} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\ f(t)\ dt \text{ est convergente} \end{array} \right.$$

On rédigera comme suit.

« La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui revient / équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ f_X(t)\ dt$. »

D'autre part, il est fréquent que la fonction f_X soit définie par cas et qu'elle soit nulle sauf sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a \leqslant b$). On poursuivra alors la rédaction comme suit :

« D'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt \ = \ \int_{a}^{b} t\, f_X(t)\ dt$$

car la fonction f_X est nulle en dehors de $[a,b]$. »

Cette rédaction est valable pour tout type d'intervalles $[a,b[$ ou $]a,b[$ ou $]a,b]$ et en choisissant $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Remarque

Il existe des v.a.r. à densité qui n'admettent pas d'espérance.
On pourra se reporter par exemple à l'exercice ***9.*** du TD.

IV.2. Propriétés de l'espérance

IV.2.a) Espérance de la transformée affine d'une v.a.r. à densité

Théorème 8.

Soit X une v.a.r. à densité f.

On suppose que X admet une espérance.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$.

1) *La v.a.r. $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.*

2) *La v.a.r. X admet une espérance. De plus :*

$$\boxed{\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b}$$

IV.2.b) Linéarité de l'espérance

Théorème 9.

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que X et Y admettent chacune une espérance.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors la v.a.r. $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance. De plus :

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\lambda X + \mu Y\big) \;=\; \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mu\,\mathbb{E}(Y)}$$

Généralisation :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. (à densité).

On suppose que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ admettent chacune une espérance.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors la v.a.r. $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ admet une espérance. De plus :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\mathbb{E}(X_i)}$$

Remarque

- Ces deux théorèmes nous fournissent des arguments permettant de démontrer qu'une v.a.r. admet une espérance. On pourra rédifer comme suit :
  - la v.a.r. Z admet une espérance car elle est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance.
  - la v.a.r. Z admet une espérance car elle est la somme / CL de v.a.r. qui admettent chacune une espérance.
- On l'a mentionné précédemment : l'ensemble des v.a.r. à densité n'est pas un espace vectoriel. Ainsi, une v.a.r. obtenue par somme / CL de v.a.r. à densité n'est pas forcément une v.a.r. à densité (une telle v.a.r. peut être à densité, discrète ou quelconque). En conséquence, l'opérateur d'espérance apparaissant dans l'écriture $\mathbb{E}\big(\lambda X + \mu Y\big)$ n'est pas forcément défini dans le programme ECE (cas où $\lambda X + \mu Y$ est une v.a.r. quelconque). Qu'importe ! Tant que l'on sait que X et Y admettent une espérance, on obtient l'espérance de $\lambda X + \mu Y$ en sommant les quantités $\lambda\,\mathbb{E}(X)$ et $\mu\,\mathbb{E}(Y)$.

Exercice

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. On note Y la v.a.r. définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de Y, notée F_Y. La tracer.
La v.a.r. Y est-elle une v.a.r. à densité ?

2. Justifier que $Y = \dfrac{X + |X|}{2}$.

3. Déterminer la loi de $|X|$.

4. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.

1. • Par définition de la v.a.r. Y, $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[\cap X(\Omega) = [0, 1]$.

• Déterminons la fonction de répartition de Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset [0, 1]$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \in [0, 1]$.
La famille $([X \leqslant 0], [X > 0])$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([Y \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([Y \leqslant x] \cap [X > 0]) \\ &= \mathbb{P}([0 \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [X > 0]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([0 < X \leqslant x]) \end{aligned}$$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$, on a :

$$\mathbb{P}([X \leqslant 0] = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2} [\, t \,]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$

De plus, comme $x \in [0, 1]$:

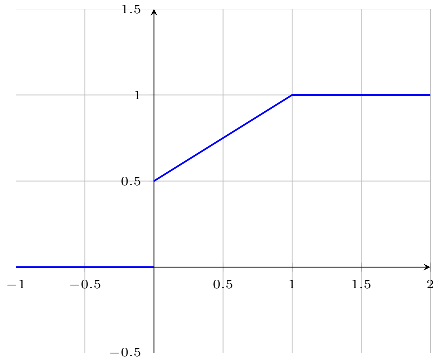
$$\mathbb{P}([0 < X \leqslant x]) = \int_{0}^{x} f(t)\, dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2} [\, t \,]_{0}^{x} = \frac{x}{2}$$

- Si $x > 1$, alors $[Y \leqslant x] = \Omega$ car $Y(\Omega) \subset [0, 1]$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Finalement : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

• La fonction F_Y admet la représentation graphique suivante.



• La fonction F_Y n'est pas continue en 0.
Ainsi Y n'est pas une v.a.r. à densité.

• La fonction F_Y n'est pas constante par morceaux, donc Y n'est pas une v.a.r. discrète.

2. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

• Si $X(\omega) \leqslant 0$, alors :

$$(X + |X|)(\omega) = X(\omega) + (|X|)(\omega) = \cancel{X(\omega)} + \cancel{(-X)(\omega)} = 0 = Y(\omega)$$

• Si $X(\omega) > 0$, alors :

$$\left(\frac{X + |X|}{2}\right)(\omega) = \frac{X(\omega) + (|X|)(\omega)}{2} = \frac{X(\omega) + X(\omega)}{2} = \frac{\cancel{2}X(\omega)}{\cancel{2}} = X(\omega) = Y(\omega)$$

Finalement, on a bien : $\dfrac{X + |X|}{2} = Y$.

3. • Notons $h : x \mapsto |x|$, de sorte que $Z = h(X)$.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$, alors $X(\Omega) = [-1, 1]$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) = h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h([-1, 1]) \\ &= [0, 1] && \textit{(par définition de } h\textit{)} \end{aligned}$$

Donc $Z(\Omega) = [0, 1]$.

- Déterminons la fonction de répartition de Z.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.
  - Si $x < 0$, alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$ car $Z(\Omega) = [0,1]$. Donc on a :
  $$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  - Si $x > 1$, alors $[Z \leqslant x] = \Omega$ car $Z(\Omega) = [0,1]$. Donc on a :
  $$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$
  - Si $0 \leqslant x \leqslant 1$.
  $$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \\ &= \int_{-x}^{x} f_X(t)\, dt \ = \ \int_{-x}^{x} \frac{1}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ t\ \right]_{-x}^{x} \ = \ x \end{aligned}$$

  On reconnaît une loi usuelle : $|X| \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

4. La v.a.r. Y admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.
Par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{X+|X|}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \big(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(|X|)\big) = \frac{1}{2}\ \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$
□

IV.2.c) Espérance du produit de deux v.a.r. indépendantes

Théorème 10.

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que :
- *X et Y admettent une espérance.*
- *X et Y sont indépendantes.*

Alors XY admet une espérance et :
$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

Remarque

- On peut faire la remarque du théorème précédent : la v.a.r. XY n'est pas forcément une v.a.r. à densité. Qu'importe ! Tant que l'on sait que X et Y admettent une espérance et sont **indépendantes**, on obtient l'espérance de XY en multipliant les quantités $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
- Le chapitre sur couples de v.a.r. discrètes fournit un théorème permettant le calcul de l'espérance d'un produit de v.a.r. (sous réserve d'existence de cette espérance) sous forme d'une somme double. Dans le programme ECE, il n'y a pas de chapitre sur les couples de v.a.r. à densité. Il n'y a donc pas au programme de théorème général pour le calcul de l'espérance d'un produit et, par suite, pas de définition de la covariance de deux v.a.r. à densité.

IV.2.d) Croissance de l'espérance

Théorème 11 (Croissance de l'espérance)**.**

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que X et Y admettent chacune une espérance.
$$\boxed{\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = 1 \ \Rightarrow\ \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)}$$

V. Moments d'une v.a.r. à densité

V.1. Définition

Définition *(Moments d'ordre r)*

Soit X une v.a.r. de densité f_X et soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que X **admet un moment d'ordre** r, noté $m_r(X)$, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r \ f_X(x) \ dx$ est absolument convergente.
  (ce qui revient à démontrer la convergence pour ces calculs de moment !)
- Sous réserve d'existence, on a : $\boxed{m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r \ f_X(x) \ dx}$

Remarque

- Si $r = 0$, on a $X^0 = 1$ et donc $m_0(X) = \mathbb{E}(1) = 1$.
- Si $r = 1$, on a $X^1 = X$ et donc $m_1(X) = \mathbb{E}(X)$.

V.2. Théorème de transfert

Théorème 12.

Soit X une v.a.r. de densité f.

On considère une fonction $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ telle que :

(i) *g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.*

(ii) *l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) \ dt$ est* **absolument** *convergente.*

(cela ne revient pas à démontrer la convergence, sauf si $g : t \mapsto t^n \ \ldots$)

1) *Alors la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance.*

2) *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) \ dt}$

Dans le cas où la fonction f est nulle en dehors d'un intervalle d'extrémités a et b (c'est-à-dire de la forme $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$ où a et b sont des réels finis ou infinis) alors on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) \ dt \\ &= \int_a^b g(t) f(t) \ dt \end{aligned}$$

Remarque

- Ce résultat ne signifie pas que la v.a.r. $g(X)$ est à densité. Il stipule simplement que la densité de la v.a.r. X va permettre de déterminer l'espérance de $g(X)$ (dans le cas où elle existe).
- Dans le cas où la fonction f est nulle en dehors d'un intervalle d'extrémtités a et b (disons $]a, b[$ pour se fixer les idées), on a vu que $\mathbb{E}\big(g(X)\big)$ pouvait s'exprimer sous la forme :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(t) f(t) \ dt$$

  De ce fait, on peut relâcher l'hypothèse de régularité de g et supposer seulement que la fonction g est continue sauf (éventuellement) en un nombre fini de points sur l'intervalle $]a, b[$.
- Ce théorème est l'analogue dans le monde continu du théorème de transfert sur les v.a.r. discrètes.

> Soit X est une v.a.r. discrète et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
> Si la série de terme général $x\mathbb{P}([X = x])$ est absolument convergente :
> $$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \ \mathbb{P}([X = x])$$

V.3. Variance d'une loi à densité

V.3.a) Definition

Définition

Soit X une v.a.r. à densité.

- Si la v.a.r. X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que la v.a.r. $(X-\mathbb{E}(X))$ admet un moment d'ordre 2, on dit que X **admet une variance**, notée $\mathbb{V}(X)$:

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = m_2(X-\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)}$$

- Sous ces hypothèses on appelle écart-type et on note $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$.

Remarque

Si X est une v.a.r. à densité alors $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est une v.a.r. de densité $f_Y : x \mapsto f_X(x+\mathbb{E}(X))$ (*cf* transformation affine).
De même, $Z = Y^2$ est une v.a.r. à densité (*cf* transformation polynomiale).
Ainsi, si X admet une variance :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(Y^2) \ = \ \mathbb{E}(Z) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} x \ f_Z(x) \ dx \ = \ \int_{0}^{+\infty} x \ f_Z(x) \ dx$$

puisque $f_Z(x) = 0$ si $x < 0$ (*cf* transformation polynomiale).

V.3.b) Détermination en pratique de la variance

Théorème 13. *Formule de Kœnig-Huygens*

Soit X une v.a.r. à densité.

On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$.

La v.a.r. X admet une variance	$\Leftrightarrow$	*La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2*

Et dans ce cas :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord, que dans le cas où X admet une espérance :

$$\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2 \qquad (*)$$

Et ainsi :

$$X^2 \ = \ (X-\mathbb{E}(X))^2 + 2\,\mathbb{E}(X)\,X - (\mathbb{E}(X))^2 \qquad (**)$$

($\Rightarrow$) Supposons que X admet une variance.
Par définition de variance, X et $(X-\mathbb{E}(X))^2$ admettent donc une espérance.
Or, d'après l'égalité $(**)$, la v.a.r. X^2 s'écrit comme la somme de v.a.r. qui admettent une espérance. Elle admet donc une espérance.

($\Leftarrow$) Supposons que X admet un moment d'ordre 2. Alors X admet un moment d'ordre 1. Autrement dit, X admet une espérance.
L'égalité $(*)$ démontre alors que la v.a.r. $(X-\mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance car est la somme de v.a.r. admettant une espérance.

Supposons maintenant que X admet une variance et démontrons la formule.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\,X) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X))^2) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2
\end{aligned}$$

□

V.3.c) Variance d'une somme de v.a.r. indépendantes

Théorème 14.

Soient X et Y deux v.a.r. (à densité).

On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.
(i.e. X et Y admettent une variance)

1) Alors la v.a.r. $X+Y$ admet une variance. De plus :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}$$

2) **Généralisation**

On suppose :
- *$X_1, \dots, X_n$ admettent une variance.*
- *$X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes.*

Alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$$

Démonstration.

1) Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X,Y) = 0$.
Donc, d'après le point précédent, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

2) Par récurrence sur n.

□

Remarque

- Rappelons de nouveau que la v.a.r. $X+Y$ n'est pas forcément une v.a.r. à densité. Qu'importe ! Tant que l'on sait que X et Y admettent une variance et sont **indépendantes**, on obtient la variance de $X+Y$ en sommant les quantités $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
- On l'a déjà vu : il n'y a pas, au programme ECE, de définition de la covariance de deux v.a.r. à densité.
  On ne peut donc pas, dans le cadre de ce programme, affirmer :
  $$\mathbb{V}(X+Y) \ = \ \mathbb{V}(X) + 2\,\text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$
  Ce résultat peut en réalité être énoncé pour des v.a.r. quelconques pourvu que les v.a.r. X et Y admettent chacune une variance. Mais cela nécessite de connaître la théorie unificatrice qui définit l'espérance / variance dans le cas des v.a.r. quelconques.

V.4. Variables centrées / réduites

Définition

Soit X une v.a.r. à densité.

a) Si X admet une espérance égale à 0 on dit que X est une variable centrée.

b) Si X admet une variance égale à 1 on dit que X est une variable réduite.

c) Si X admet une variance non nulle, la variable $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X.