Feuille d'exercices n°11 : Variables à densité

Fonction de répartition et densité de probabilité

Exercice 1. (★)
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X.

2. Déterminer une densité de probabilité f de la variable X.

3. Calculer la probabilité de l'événement : $[0,973 < X \leqslant 1,2]$.

Exercice 2. (★) *(d'après* `HEC - Maths III - 1982`*)*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \alpha\, x^{-4} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de α pour que f soit une densité de probabilité.
On note alors X une variable aléatoire de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Pour tous réels x et a tels que $a > 1$, calculer $F_a(x) = \mathbb{P}_{[X>a]}([X < x])$.

4. Soit $a > 1$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = aX$. En déduire une densité de probabilité de $Y = aX$.

Exercice 3. (★) *(d'après* `EML 1997`*)*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } -\ln(2) \leqslant x \leqslant \ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé avec comme unité 5 cm.

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.

a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) A l'aide du graphe de f, conjecturer une relation entre $\mathbb{P}([X \leqslant -x])$ et $\mathbb{P}([X \geqslant x])$, pour tout $x \geqslant 0$, puis la démontrer.
Pour tout réel x, déterminer une relation entre $F(-x)$ et $F(x)$.

Opérations sur les variables à densité

Exercice 4. (★)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
La variable Y est-elle une variable aléatoire à densité ?
Si oui, déterminer une densité de Y.

2. De même, déterminer la fonction de répartition de X^2, et une densité de X^2 s'il s'agit d'une variable aléatoire à densité.

3. De même, déterminer la loi de X^3.

4. On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z = \frac{1}{X} \text{ si } X > 0 \ \text{ et } \ Z = 0 \text{ si } X = 0$$

Déterminer la loi de Z.

Exercice 5. ($\bigstar\bigstar$) *(d'après* `EDHEC 2008`*)*

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ est convergente et donner sa valeur.

2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$

a) Montrer que f est paire.

b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f comme densité.
On note F la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$.

b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.

c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x - 1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 6. ($\bigstar$)

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f définie et continue sur $\mathbb{R}$ et paire. On note F la fonction de répartition de X.

1. Montrer que, pour tout réel x, $F(x) + F(-x) = 1$.

2. On suppose que la variable X^2 suit la loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer alors la fonction de répartition F de X, puis la densité f.

Exercice 7. ($\bigstar$) *(d'après* `EDHEC 2002`*)*

Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière par défaut de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Soit $\lambda > 0$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
On pose $Y = \lfloor X \rfloor$.
On a donc : $\forall k \in \mathbb{Z},\ [Y = k] = [k \leqslant X < k+1]$.

1. *a)* Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}([Y = k-1])$.

c) En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d) Donner l'espérance et la variance de $Y+1$.
En déduire l'espérance et la variance de Y.

2. On pose $Z = X - Y$.

a) Déterminer $Z(\Omega)$.

b) En utilisant le système complet d'événements $\big([Y = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer :

$$\forall x \in [0,1[\,,\ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

c) En déduire une densité f de Z.

Exercice 8. ($\bigstar$)

Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[-2, 2]$.
La variable X admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [-2,2] \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Y = |X|$.
La variable aléatoire Y admet-elle une densité ?
Si oui, déterminer une densité de Y.

3. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Z = X + Y$.
On pourra considérer le système complet d'événements $([X < 0], [X \geqslant 0])$.
La v.a.r. Z admet-elle une densité ? Si oui, déterminer une densité de Z.

Espérance et variance

Exercice 9. (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 2$.
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes, de densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty,1[\end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X_1.

3. Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X_1)$ et de $\mathbb{V}(X_1)$.

4. On pose $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Z = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Vérifier que Y et Z sont des variables aléatoires réelles à densité, puis déterminer une densité de Y et une densité de Z.
Étudier l'existence des espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$ de Y et Z, et les calculer lorsqu'elles existent.

Exercice 10. (★★) *(d'après* `EML 2002`*)*
On note $a = -\dfrac{\ln(9)-\ln(5)}{\ln(9)-\ln(4)}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée Y.

2. Déterminer une densité f de Y.

3. Montrer que Y admet une espérance $\mathbb{E}(Y)$ et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

4. ***a)*** Montrer que la variable $Z = \left(\dfrac{4}{9}\right)^Y$ admet une espérance.
La calculer.

b) De même, montrer que Z admet une variance, et la calculer.

Exercice 11. (★★) *(d'après* `HEC 2007 - Maths III`*)*
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e}^{-|x|}$.

a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(x)\,dx$ sont convergentes et de même valeur.

b) Établir que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité.
On dit alors que Y suit la loi $\mathcal{L}(0)$.

2. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3. ***a)*** Pour $r \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $m_r(Y)$ (moment d'ordre r de Y).

b) Calculer, pour tout r de $\mathbb{N}$, $m_r(Y)$ en fonction de r. Quelles sont les valeurs de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ et de la variance $\mathbb{V}(Y)$ de la v.a.r. Y ?

Exercice 12. (★★)
Soit X une variable aléatoire positive à densité. Soit f une densité de X. On suppose que f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $[0,+\infty[$, et qu'il existe un réel λ strictement positif tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\,dt$ est convergente.

1. Montrer que pour tout réel $x \in]0,\lambda[$, e^{xX} admet une espérance.

2. Montrer que : $\forall a > 0,\ \forall x \in]0,\lambda[,\ \mathbb{P}([X \geqslant a]) \leqslant \mathrm{e}^{-ax}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{xX}\right)$.

Exercice 13. (★★)
Soit X une v.a.r. positive à densité. On suppose que X admet une densité f continue sur $[0,+\infty[$ et nulle sur $]-\infty,0[$. On suppose également que X admet une espérance.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathbb{P}([X \geqslant x]) = 0$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X \geqslant t])\,dt$ converge, et est égale à $\mathbb{E}(X)$.

Problèmes

Exercice 14. (★★) *(d'après* `ECRICOME 2007`*)*
Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin réalise une étude du temps moyen de passage en caisse.
Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.
Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.

2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera. Quel est le temps moyen de passage en caisse (en unités de temps) ?

3. ***a)*** Démontrer que la fonction de répartition de T, est définie par :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités (de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\frac{2\mathrm{e}-3}{2\mathrm{e}}$.

4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé.
On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.

a) M désigne le temps d'attente de C. Écrire M en fonction de T_A et T_B.

b) Montrer que la fonction de répartition de la v.a.r. M est donnée par :

$$F_M(t) = \begin{cases} 1-(1+t)^2\,\mathrm{e}^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

c) Prouver que M est une variable à densité et en donner une densité.

Exercice 15. (★★)
Des voyageurs arrivent de façon aléatoire dans la salle d'attente de la gare de Lyon. On suppose que la variable aléatoire réelle N_t égale au nombre de voyageurs arrivant entre les instants 0 et t, avec $t > 0$, suit une loi de Poisson de paramètre αt, avec $\alpha > 0$.

1. On note X_1 l'instant d'arrivée du premier voyageur.

a) Déterminer $\mathbb{P}([X_1 > t])$, pour tout réel t strictement positif, puis reconnnaître la loi de X_1.

b) Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X_1)$ et de $\mathbb{V}(X_1)$.

2. ***a)*** Soit $n \geqslant 2$. Soit X_n la variable aléatoire égale à l'instant d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ voyageur. On note F_n la fonction de répartition de X_n.
Décrire, pour $t > 0$, l'événement $[X_n > t]$ à l'aide de la variable N_t.
Montrer que : $\forall t > 0,\ F_n(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\alpha t)^k}{k!}$.

b) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une densité f_n de X_n.

c) Montrer que X_n admet une espérance et une variance, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donner les valeurs de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Loi du min, du max de deux v.a.r. à densité

Exercice 16. (★★)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.
On définit les variable aléatoires $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Démontrer que :

$$[U > t] = [X > t] \cap [Y > t] \qquad \text{et} \qquad [V \leqslant t] = [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]$$

2. Déterminer la fonction de répartition G, puis une densité g de U.

3. Déterminer la fonction de répartition H, puis une densité h de V.

4. Calculer l'espérance de U.

5. Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y.
En déduire l'espérance de V.

Simulation informatique

Exercice 17. (★★) *(d'après* `EML 2007`*)*
Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

- l'événement $[Y = 0]$ est égal à l'événement $[X < 1]$,
- pour tout nombre entier strictement positif n, l'événement $[Y = n]$ est égal à l'événement $[n \leqslant X < n+1]$.

On remarquera que $Y = \lfloor X \rfloor$.

1. Montrer, pour tout entier naturel n : $\mathbb{P}([Y = n]) = \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \mathrm{e}^{-n}$.

2. Montrer que $Y+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

3. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y :

```
u = rand()
y = ...
while ...
    ...
    ...
    ...
end
disp('y vaut ', y)
```

Quel est le nombre moyen de passages dans la boucle `while` ? *(on comptera le nombre de tests effectués)*

4. On note U une variable suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) Déterminer la loi de la variable $Z = -\ln(1 - U)$.

b) En déduire un second programme qui simule la variable aléatoire Y.

Exercice 18. (★★)
Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soient $U_1, U_2, \ldots, U_n$ n variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère S_n la variable aléatoire définie par :

$$S_n = \max\left(U_1, U_2, \ldots, U_n\right)$$

1. Écrire un programme simulant une réalisation de la variable S_n, l'entier n étant entré au clavier.

2. Déterminer la loi de la variable S_n.

Partie 2

Soit $(U_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la v.a.r. S_k par : $S_k = \max(U_1, U_2, \ldots, U_k)$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une v.a.r. X_n qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$, et indépendante de $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$
On pose alors $T_n = S_{X_n}$.

1. Donner la fonction de répartition G_n de la variable aléatoire T_n.
On pourra considérer le système complet d'événements $(\,[X_n = k]\,)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

2. En déduire que T_n est une variable aléatoire à densité.
En donner une densité, puis calculer l'espérance et la variance de T_n.

3. Écrire une fonction **Scilab** qui prend en paramètre un tableau `S` et renvoie son plus grand élément.

4. Écrire un programme en **Scilab** permettant de simuler T_{10}.

5. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n)$.

6. Étudier la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$, c'est-à-dire déterminer, pour tout réel t, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(t)$.

Exercice 19. (★★)
On considère le programme suivant :

```
a = input('Entrer un réel strictement positif : ')
u = rand()*a
v = a - u
if v > u then
    w = v
else
    w = u
end
```

On note U, V, W les variables aléatoires égales aux valeurs des variables `u,v,w` après exécution du programme.
Quelles sont, en fonction du réel a, les lois des variables U, V et W ?

Loi d'une somme de v.a.r. à densité

Exercice 20. (★★) *(d'après* `HEC 2010`*)*
Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la v.a.r. $U+V$ est à denisté à condition que la fonction f_{U+V} suivante existe. Cette fonction f_{U+V} définit alors une densité de $U+V$.

$$f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_U(x-t)\ dt$$

1. Montrer que la variable aléatoire $-Y$ est à densité et en déterminer une densité.

2. En déduire, en séparant les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$, que la variable $Z = X - Y$ admet pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda |x|}$$

3. Démontrer que la variable aléatoire $T = |Z|$ est à densité et en déterminer une densité.

Simulation de v.a.r. par la méthode d'inversion

La méthode d'inversion est une généralisation du résultat suivant.
Soit X une v.a.r. . On suppose que sa fonction de répartition F_X réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
Soit U une v.a.r. de loi uniforme sur $]0,1[$,
Alors les v.a.r. $F^{-1}(U)$ et X ont la même loi.
Ainsi, pour simuler la v.a.r. X, il suffit de simuler la v.a.r. $F^{-1}(U)$.

Exercice 21. (★★) *(d'après* `HEC 2007`*)*
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e}^{-|x|}$.

(dans l'exercice 11 on montre que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(x)\ dx$ sont convergentes, de valeur $\dfrac{1}{2}$ et que g est une densité de probabilité)
Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité.

On dit alors que Y suit la loi de Laplace de paramètre 0, notée $\mathcal{L}(0)$.

1. Déterminer la fonction de répartition G de Y.

2. Établir que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

3. Montrer que l'équation $G(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution que l'on déterminera.

4. Établir que la fonction $x \mapsto G(x)\,(1 - G(x))$ est paire.

5. *a)* Montrer que l'application réciproque G^{-1} de G est définie par :

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

b) Écrire une fonction **Scilab** nommée `Laplace` qui permet de simuler une v.a.r. suivant la loi $\mathcal{L}(0)$.

Exercice 22. (★★) *(d'après* `HEC 2015`*)*
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : $F(x) = \exp\left(-e^{-\lambda x}\right)$.

1. Justifier que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

2. En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera ; on dit que T *suit la loi de Gumbel de paramètre* λ.

On suppose maintenant que $\lambda = 1$.

3. Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.

4. On considère le programme **Scilab** suivant :
`x=linspace(-2,2,400); y=(exp(-exp(-x))); plot(x,y), plot(y,x)`
Le réel 0 fait-il partie des nombres renvoyés par la commande :
`x=linspace(-2,2,400)` ?

5. Quel sera le résultat de l'exécution de ce programme ?

6. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

7. Par une méthode de votre choix, écrire en **Scilab** les commandes qui permettent de simuler la loi de T.

Exercice 23. (★★)
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) = \dfrac{1}{1+e^{-y}}$.
On admet que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. .
On dit alors que cette v.a.r. suit la *loi logistique*.
On considère Z une v.a.r. suivant la loi logistique.

1. Déterminer une densité de probabilité de Z, notée f.

2. Étudier la parité de f puis en déduire que Z admet une espérance et la déterminer.

3. Soit U une v.a.r. de lui uniforme sur $]0,1[$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

Exercice 24. (★)
Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$.
On considère la v.a.r. : $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

1. Déterminer la loi de V, son espérance et sa variance.

2. Déterminer une densité de $W = V^2$ et de $Z = \dfrac{1}{V}$.

Exercice 25. (★★) *(adapté de* `ESSEC 2006 Maths III`*)*
Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note F la fonction de répartition de X.
On définit sur $]0,1[$ la fonction Q, appelée fonction quantile de X, par :

$$\forall x \in]0,1[,\ Q(x) = k \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } F(k-1) < x \leqslant F(k).$$

1. Montrer que $Q(U)$ et X suivent la même loi.

2. Application : Simulation de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

a) Écrire une fonction `F` de paramètres `k` de et `lambda` qui à tout entier naturel k renvoie la valeur de $F(k)$.

b) Justifier le résultat suivant : « pour tout $u \in]0,1[$, $Q(u)$ est égal au plus grand entier k tel que $u > F(k-1)$ ».
En déduire une fonction `quantile` de paramètres `u` et `lambda` qui renvoie la valeur de $Q(u)$.

c) En déduire un programme simulant une réalisation de la variable aléatoire X, la valeur de λ étant entrée au clavier.

Loi normale

Exercice 26. (★★)
La taille d'un individu d'une population suit une loi normale de moyenne 171 cm et d'écart-type 5 cm.

1. Un individu étant choisi au hasard dans la population, on désigne par X sa taille en centimètres. Calculer les probabilités des événements suivants : $[X = 175]$ à 1 centimètre près ; $[X < 160]$ et $[|X - 171| > 15]$.

2. On choisit au hasard n personnes dans la population et on désigne par Y_n la moyenne de leur taille. On admet que Y_n suit une loi normale. Déterminer un entier n tel que $\mathbb{P}([|Y_n - 171| > 1]) < 0,05$.

Exercice 27. (★)
On suppose que Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(7, 16)$.

1. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}([Y < 7])$ et $\mathbb{P}([Y \leqslant 12,12])$.

2. Déterminer le seuil x tel que : $\mathbb{P}([Y \leqslant x]) = 0,9162$.
Déterminer le seuil y tel que $\mathbb{P}([Y > y]) = 0,9418$.

Exercice 28. (★) *(extrait de* `ECRICOME 2009`*)*
Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport. Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0,8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.

2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?

3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ?
(On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en annexe).

4. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.

a) On désigne par Y la v.a.r. égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes. Déterminer la loi de Y, donner sans calcul, son espérance et sa variance.

b) On définit par Z la v.a.r. discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
Déterminer en fonction de p la probabilité des événements $[Z = 0]$, puis $[Z = k]$ pour $1 \leqslant k \leqslant 10$.

5. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :

× le premier jour, il prend le bus.
× si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
× si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « Monsieur Thurman prend le bus le jour n ».

a) Justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+1} = \left(p - \dfrac{1}{2}\right) p_n + \dfrac{1}{2}$.

b) Soit α le réel vérifiant : $\alpha = \left(p - \dfrac{1}{2}\right) \alpha + \dfrac{1}{2}$.
Déterminer α en fonction de p, puis montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_n = \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - \alpha) + \alpha$.

c) La suite (p_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

Exercice 29. (★★) *(d'après* EDHEC 2007*)*
On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux v.a.r. à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}(Z_1 Z_2) - \mathbb{E}(Z_1)\ \mathbb{E}(Z_2)$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. *a)* En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([U=1] \cap [X \leqslant x]) + \mathbb{P}([U=-1] \cap [X \geqslant -x])$$

b) En déduire que Y suit la même loi que X.

2. *a)* Calculer l'espérance de U, puis montrer que $\mathbb{E}(XY) = 0$.

b) En déduire que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

3. *a)* Rappeler la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} x^2\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

b) Montrer, grace à une intégration par parties, que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A x^4\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = -A^3\ \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$$

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$ converge et vaut $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

d) Établir que X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}(X^4) = 3$.

4. *a)* Vérifier que $\mathbb{E}(X^2\ Y^2) = 3$.

b) Déterminer $\text{Cov}(X^2, Y^2)$.

c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.
Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densité. Lequel ?

Exercice 30. (★★)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}_+$ la probabilité $\mathbb{P}([a < X < na])$ est-elle maximale ?

Exercice 31. (★)
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Exprimer en fonction de Φ l'intégrale $\displaystyle\int_2^{2+\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-x^2+4x-2}\, dx$.

Exercice 32. (★)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

2. Calculer l'espérance de Y et sa variance, si elles existent.

Table de la loi normale centrée réduite.
On utilise parfois (notamment en statistiques), des tables contenant les valeurs caractéristiques de certaines lois usuelles. La table ci-dessous contient les valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\Phi(t) = \mathbb{P}([X \leqslant t]) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Fig. 1 Table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

On lit par exemple : $\Phi(1.64) = 0.9495$.

Lois classiques mais hors-programme

Exercice 33. (★★)
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une v.a. suivant la loi de Pareto de paramètres a et b, c'est-à-dire admettant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ a\dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geqslant b \end{cases}$$

1. Vérifier que la fonction f définit bien une densité de probabilité.

2. Calculer l'espérance et la variance de X, en précisant à quelles conditions chacune de ces quantités existent.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. On appelle fonction de survie la fonction $S : x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$. Préciser S.

5. Calculer, pour tout réel y positif ou nul, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+y])$ puis vérifier que cette quantité tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

6. On pose dans cette question : $Y = \ln\left(\dfrac{X}{b}\right)$.

Démontrer que Y est une v.a. à densité puis montrer qu'elle suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 34. (★)
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

a. Déterminer la loi de $Y = e^X$. *(c'est ce qu'on appelle la loi* log-normale*)*

b. Quelle est l'espérance de Y ?