CH VII : Applications linéaires

I. Notion d'application linéaire

I.1. Définition

Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

- Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) \\ \textit{(l'image d'une somme est la somme des images)} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{x} \in E^2,\ f(\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}) \\ \textit{(l'image d'une multiplication par un scalaire est} \\ \textit{la multiplication scalaire de l'image)} \end{array}}$$

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$.
  Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E.

Théorème 1 (Caractérisation des applications linéaires)**.**

Soient E et F des espaces vectoriels.

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \textit{L'application } f : E \to F \textit{ est linéaire} \\ \Leftrightarrow & \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2,\ f(\lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{y}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}) + \mu \cdot f(\overrightarrow{y}) \\ \Leftrightarrow & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2,\ f(\lambda \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) \\ & \textit{(caractérisation à éviter car elle introduit une dissymétrie de} \\ & \textit{traitement des vecteurs } \overrightarrow{x} \textit{ et } \overrightarrow{y} \textit{ et masque la notion de CL)} \end{array}}$$

I.2. Propriétés

Propriété

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire.

Alors :

1) $\boxed{f(\overrightarrow{0_E}) \ = \ \overrightarrow{0_F}}$

2) $\boxed{\forall \overrightarrow{x} \in E,\ f(-\overrightarrow{x}) = -f(\overrightarrow{x})}$

3) $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \in E^n,$

$$\boxed{f(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{x_n}) = \lambda_1 \cdot f(\overrightarrow{x_1}) + \cdots + \lambda_n \cdot f(\overrightarrow{x_n})}$$

(compatibilité de f avec les combinaisons linéaires)

Démonstration.

1) Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Alors : $f(0 \cdot \overrightarrow{x}) = 0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

2) Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Alors : $f(-\overrightarrow{x}) = f((-1) \cdot \overrightarrow{x}) = (-1) \cdot \overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x}$.

3) Par récurrence sur $n \geqslant 1$. □

Remarque

Une application linéaire est donc à la fois convexe et concave.

Exemple

- L'application nulle de E dans F, définie par :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & \overrightarrow{0} \end{array}$$

  est une application linéaire.

- L'application identité de E, définie par :

$$\mathrm{id}_E \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & \overrightarrow{x} \end{array}$$

  est une application linéaire.

I.3. Exemple fondamental

Théorème 2.
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Soit $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Alors, il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *telle que* h *s'écrit sous la forme :*

$$h \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Démonstration.
Notons $\mathcal{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ la base canonique de $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Notons $\mathcal{B}_F = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ la base canonique de $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Le vecteur X se décompose de manière unique sur $\mathcal{B}_E$.
  Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que :

$$X \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ + \ \dots \ + x_p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \ \dots \ + x_p \cdot \overrightarrow{e_p}$$

  Par application de la fonction h, linéaire, on obtient :

$$h(X) \ = \ x_1 \cdot h(\overrightarrow{e_1}) + \ \dots \ + x_p \cdot h(\overrightarrow{e_p})$$

  Cette écriture met en avant une propriété des applications linéaires sur les ev de dimension finie : les valeurs $h(\overrightarrow{e_1})$, ..., $h(\overrightarrow{e_p})$ *permettente de déterminer la valeur de* $h(X)$.
  Ainsi, h *est entièrement déterminée par l'image de la base* $\mathcal{B}_E$.

- Notons alors :

$$h(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \qquad \dots \qquad h(\overrightarrow{e_p}) = \begin{pmatrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \\ m_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$$

- Alors :

$$h(X) \ = \ \begin{pmatrix} m_{11}\ x_1 + \dots + m_{1p}\ x_p \\ m_{21}\ x_1 + \dots + m_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ m_{n1}\ x_1 + \dots + m_{np}\ x_p \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & \dots & m_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ = \ MX$$

  où $M = (m_{ij})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$

□

Exercice

1. On considère l'application Φ définie par :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \end{array}$$

Montrer que Φ est une application linéaire.

2. On considère l'application u définie par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Montrer que u est une application linéaire.

II. Structure de l'ensemble des applications linéaires

II.1. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$

Théorème 3.

Soient E et F des espaces vectoriels.

- *L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est muni :*
  - *d'une loi de composition interne, notée +*
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $v \in \mathscr{L}(E,F)$, $u+v$ est l'application linéaire de E dans F définie par :
    $$u+v : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & u(\overrightarrow{x}) + v(\overrightarrow{x}) \end{array}$$
  - *d'une loi de composition externe, notée $\cdot$*
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de E dans F définie par :
    $$\lambda \cdot u : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & \lambda \cdot u(\overrightarrow{x}) \end{array}$$
- *L'espace $\mathscr{L}(E,F)$ muni de + et $\cdot$ est un espace vectoriel.*

Démonstration.
Montrons que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(E,F)$ des applications de E dans F.

⋆ Par définition, $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{F}(E,F)$: $\mathscr{L}(E,F) \subset \mathscr{F}(E,F)$.

⋆ On sait que l'application nulle $\theta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \overrightarrow{x} & \longmapsto & \overrightarrow{0_F} \end{array}$ est une application linéaire. On a donc $\theta \in \mathscr{L}(E,F)$, et $\mathscr{L}(E,F)$ est non vide.

⋆ Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrons que $u+v \in \mathscr{L}(E,F)$.
Soient $\overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{y} \in E$ et α un réel.
On a alors, par définition de la loi + :

$$\begin{array}{rcl} (u+v)\,(\alpha.\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) & = & u\,(\alpha.\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + v\,(\alpha.\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \\ & = & \alpha.u\,(\overrightarrow{x}) + u\,(\overrightarrow{y}) \ + \ \alpha.v\,(\overrightarrow{x}) + v\,(\overrightarrow{y}) \text{, par linéarité de } u \text{ et d} \\ & = & \alpha.u\,(\overrightarrow{x}) + \alpha.v\,(\overrightarrow{x}) + u\,(\overrightarrow{y}) + v\,(\overrightarrow{y}) \\ & = & \alpha.\big(u\,(\overrightarrow{x}) + v\,(\overrightarrow{x})\big) + u\,(\overrightarrow{y}) + v\,(\overrightarrow{y}) \\ & = & \alpha.\big(u+v\big)\,(\overrightarrow{x}) + \big(u+v\big)\,(\overrightarrow{y}) \text{, par définition de la loi } + \end{array}$$

L'application $u+v$ est donc linéaire : $\mathscr{L}(E,F)$ est donc stable par addition.

⋆ Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda \cdot u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Soient $\overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{y} \in E$ et α un réel.
On a alors, par définition de la loi . :

$$\begin{array}{rcl} (\lambda \cdot u)\,(\alpha.\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) & = & \lambda \cdot u\,(\alpha.\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \\ & = & \lambda.\big(\alpha.u\,(\overrightarrow{x}) + u\,(\overrightarrow{y})\big) \text{, par linéarité de } u \\ & = & \lambda.\alpha.u\,(\overrightarrow{x}) + \lambda \cdot u\,(\overrightarrow{y}) \\ & = & \alpha.\lambda \cdot u\,(\overrightarrow{x}) + \lambda \cdot u\,(\overrightarrow{y}) \\ & = & \alpha.\,(\lambda \cdot u)\,(\overrightarrow{x}) + (\lambda \cdot u)\,(\overrightarrow{y}) \text{, par définition de la loi .} \end{array}$$

L'application $\lambda \cdot u$ est donc linéaire : $\mathscr{L}(E,F)$ est donc stable par produit par un scalaire.

Le sous-ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ de $\mathscr{F}(E,F)$ est non vide, et stable par addition et par produit par un scalaire. On en déduit que c'est un sous-espace vectoriel réel de $\mathscr{F}(E,F)$. On sait en particulier que $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel réel.

□

II.2. Composition d'applications linéaires

Théorème 4.

Soient E, F, G et H des espaces vectoriels.

1) *Si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u$.*
Par ailleurs, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on introduit la notation :

$$\begin{cases} u^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u\ (= u \circ u^k) \end{cases}$$

(La notation $u^2(\overrightarrow{x}) = u(u(\overrightarrow{x}))$ ne doit pas être confondue avec l'élévation au carré ! $u(\overrightarrow{x}) \times u(\overrightarrow{x})$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels)

2) *Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$.*

3) *Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$ et $w \in \mathscr{L}(G, H)$, alors :*

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$$

On pourra donc noter $w \circ v \circ u$ l'application linéaire $w \circ (v \circ u) \in \mathscr{L}(E, H)$.

4) *Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, et si $v_1 \in \mathscr{L}(F, G)$ et $v_2 \in \mathscr{L}(F, G)$, alors :*

$$(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$$

5) *Si $u_1 \in \mathscr{L}(E, F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $v \in \mathscr{L}(F, G)$, alors :*

$$v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$$

6) *Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :*

$$v \circ (\lambda \cdot u) = (\lambda \cdot v) \circ u = \lambda \cdot (v \circ u)$$

Démonstration.

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $\overrightarrow{x}$ de E, on a :

$$u \circ \mathrm{id}_E(\overrightarrow{x}) = u\big(\mathrm{id}_E(\overrightarrow{x})\big) = u(\overrightarrow{x}) = \mathrm{id}_E\big(u(\overrightarrow{x})\big) = \mathrm{id}_E \circ u(\overrightarrow{x}).$$

On a bien : $u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u$.

2) Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$ et $w \in \mathscr{L}(G, H)$. Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, on a :

$$w \circ (v \circ u)(\overrightarrow{x}) = w\big(v \circ u\,(\overrightarrow{x})\big) = w\big(\,v\,(u\,(\overrightarrow{x}\,))\big) \ \text{ et } \ (w \circ v) \circ u(\overrightarrow{x}) = (w \circ v)\big(u\,(\overrightarrow{x})\big) = w\big($$

On a donc bien : $\quad w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.
De plus, on sait que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire. On en déduit que $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$, car $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Par conséquent, comme $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$ et $w \in \mathscr{L}(G, H)$, on a bien : $w \circ (v \circ u) \in \mathscr{L}(E, H)$.

3) Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v_1 \in \mathscr{L}(F, G)$ et $v_2 \in \mathscr{L}(F, G)$. Pour tout $\overrightarrow{x}$ de E, on a :

$$(v_1 + v_2) \circ u(\overrightarrow{x}) = (v_1 + v_2)\,\big(u(\overrightarrow{x})\big) = v_1\big(u\,(\overrightarrow{x}\,)\big) + v_2\big(u\,(\overrightarrow{x}\,)\big),$$

par définition de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(F, G)$. On a donc, pour tout $\overrightarrow{x}$ de E :

$$(v_1 + v_2) \circ u(\overrightarrow{x}) = v_1\big(u\,(\overrightarrow{x}\,)\big) + v_2\big(u\,(\overrightarrow{x}\,)\big) = v_1 \circ u(\overrightarrow{x}) + v_2 \circ u(\overrightarrow{x}) = (v_1 \circ u + v_2 \circ u)\,($$

On a donc bien : $(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.

4) Soient $u_1 \in \mathscr{L}(E, F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Pour tout $\overrightarrow{x}$ de E, on a :

$$v \circ (u_1 + u_2)\,(\overrightarrow{x}) = v\big(\,(u_1 + u_2)\,(\overrightarrow{x})\big) = v\,(u_1(\overrightarrow{x}) + u_2(\overrightarrow{x}))\,,$$

par définition de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$. On a donc, pour tout $\overrightarrow{x}$ de E :

$$v \circ (u_1 + u_2)\,(\overrightarrow{x}) = v\,(u_1(\overrightarrow{x}) + u_2(\overrightarrow{x})) = v\,(u_1(\overrightarrow{x})) + v\,(u_2(\overrightarrow{x}))\,,$$

par linéarité de v. On a donc montré que, pour tout $\overrightarrow{x}$ de E, on a :

$$v \circ (u_1 + u_2)\,(\overrightarrow{x}) = v \circ u_1(\overrightarrow{x}) + v \circ u_2(\overrightarrow{x}) = (v \circ u_1 + v \circ u_2)\,(\overrightarrow{x}).$$

On a donc bien : $\quad v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.

5) Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $\overrightarrow{x}$ de E, on a :

$$v \circ (\lambda.u)(\overrightarrow{x}) = v\big(\,(\lambda \cdot u)(\overrightarrow{x})\,\big) = v\big(\,\lambda \cdot u(\overrightarrow{x})\,\big) = \lambda.v\big(\,u(\overrightarrow{x})\,\big),$$

par linéarité de v. De même, pour tout $\overrightarrow{x}$ de E, on a :

$$(\lambda.v) \circ u(\overrightarrow{x}) = (\lambda.v)\big(\,u(\overrightarrow{x})\,\big) = \lambda.v\big(\,u(\overrightarrow{x})\,\big),$$

par définition de l'application $\lambda.v$. On a donc montré que, pour tout $\overrightarrow{x}$ de E, on a :

$$\lambda.(v \circ u)(\overrightarrow{x}) = \lambda.v\big(\,u(\overrightarrow{x})\,\big) = v \circ (\lambda.u)(\overrightarrow{x}) = (\lambda.v) \circ u(\overrightarrow{x}).$$

On a donc bien : $\;v \circ (\lambda.u) = (\lambda.v) \circ u = \lambda.(v \circ u)$. $\square$

Remarque

- Si E est un espace vectoriel, on a vu que l'espace $\mathscr{L}(E)$ est naturellement muni des lois $+$, $\cdot$ qui en font un espace vectoriel.
- On voit de plus que $\mathscr{L}(E)$ est muni de la loi $\circ$ qui se comporte bien vis à vis des lois $+$ et $\cdot$. Ajouté aux lois $+$ et $\cdot$, la loi $\circ$ munit l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ d'une structure nommée **algèbre**. Cette algèbre est dite non commutative car la loi $\circ$ n'est pas commutative (si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$, on n'a pas nécessairement $u \circ v = v \circ u$).

Exercice

Soit E un espace vectoriel réel.
Soient u et v des endomorphismes de E tels que u et v commutent :

$$u \circ v = v \circ u$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, u^k et v commutent :

$$u^k \circ v = v \circ u^k$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

II.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

II.3.a) Définition

Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

- Une application $u : E \to F$ est un **isomorphisme de E dans F** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  (ii) u est bijective.

  S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes.
- Une application $u : E \to E$ est un **automorphisme de E** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E)$ (autrement dit, u est un endomorphisme de E).
  (ii) u est bijective.

II.3.b) Application réciproque, cas général

Rappels de première année

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).

Rappelons que :

$$\begin{array}{cl} & f : E \to F \text{ est bijective} \\ \Leftrightarrow & f \text{ est injective et surjective} \\ \Leftrightarrow & \text{tout élément } y \in F \text{ admet un et un seul antécédent } x \in E \text{ par } f \\ \Leftrightarrow & \forall y \in F,\ \exists ! x \in E,\ y = f(x) \end{array}$$

Définition

Soient E et F des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Supposons que f est bijective.

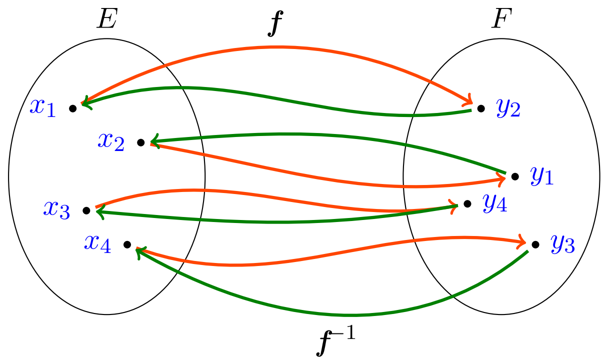
- On appelle **application réciproque de f** et on note $f^{-1} : F \to E$, l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & F & \to & \text{E} \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) : \text{l'unique antécédent} \\ & & & \text{de } y \text{ par l'application } f \end{array}$$

- On en déduit immédiatement que :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \boxed{y = f(x) \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(y) = x}$$

Représentation graphique.
Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.



Théorème 5.

Soient E et F des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application bijective.

1. *L'application f^{-1} est bijective et de réciproque f :* $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

2. ***a)*** $\forall x \in E, \forall y \in F,$ $\boxed{y = f(x) \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(y) = x}$

b) $\boxed{\forall y \in F,\ \ f(f^{-1}(y)) = y}$

c) $\boxed{\forall x \in E,\ \ f^{-1}(f(x)) = x}$

Théorème 6.

Soient E et F des ensembles.

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \textit{Les applications } f \textit{ et } g \textit{ sont bijectives et} \\ \textit{réciproques l'une de l'autre :} \\ \qquad g = f^{-1} \quad \textit{et} \quad f = g^{-1} \end{array}}$$

II.3.c) Application réciproque d'un isomorphisme

Théorème 7.

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Supposons que u est un isomorphisme de E dans F.

Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
(en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$)

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
- Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) \in F^2$.
  L'application u étant surjective :
  - × il existe $x_1 \in E$ tel que : $\overrightarrow{y_1} = u(\overrightarrow{x_1})$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $\overrightarrow{x_1} = u^{-1}(\overrightarrow{y_1})$.
  - × il existe $x_2 \in E$ tel que : $\overrightarrow{y_2} = u(\overrightarrow{x_2})$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $\overrightarrow{x_2} = u^{-1}(\overrightarrow{y_2})$.

  On en déduit que :

$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{y_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{y_2}) &= u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(\overrightarrow{x_1}) + \lambda_2 \cdot u(\overrightarrow{x_2})\Big) \\ &= u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{x_2})\Big) \\ &= \lambda_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{x_2} \\ &= \lambda_1 \cdot u^{-1}(\overrightarrow{y_1}) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(\overrightarrow{y_2}) \end{aligned}$$

  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$. □

Théorème 8.

Soient E, F et G des espaces vectoriels.

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.

Supposons que u et v sont des isomorphismes.

1) *Alors $v \circ u : E \to G$ est un isomorphisme de E.*
(on a notamment $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$)

2) *De plus :* $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}}$

Démonstration.
À FAIRE. □

III. Noyau et image d'une application linéaire

III.1. Noyau d'une application linéaire

III.1.a) Définition

Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On appelle **noyau de** f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{x} \in E \mid f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0_F}\}}$$

III.1.b) Structure du noyau d'une application linéaire

Théorème 9.

Soient E et F des espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

1) $\mathrm{Ker}(f) \subseteq E$ par définition.

2) $\mathrm{Ker}(f) \neq \varnothing$ car $\overrightarrow{0}_E \in \mathrm{Ker}(f)$. En effet : $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.

3) Stabilité de $\mathrm{Ker}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{x_2}) &= \lambda_1 \cdot f(\overrightarrow{x_1}) + \lambda_2 \cdot f(\overrightarrow{x_2}) && \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ &= \lambda_1 \cdot \overrightarrow{0_F} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{0_F} && \textit{(car } \overrightarrow{x_1} \in \mathrm{Ker}(f) \textit{ et } \overrightarrow{x_2} \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ &= \overrightarrow{0_F} \end{aligned}$$

□

Exemple

Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$.
  Alors $\mathrm{Ker}(f) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$.
  Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des solutions du système homogène $MX = 0$.
  (n inconnues et p équation)
- Il faut savoir reconnaître les ensembles représentant des noyaux.
  Par exemple, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 2y \text{ et } z = -y \right\} = \mathrm{Ker}(f)$ où l'application linéaire f est définie par :
  $$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x-2y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$
  On peut écrire ce noyau comme espace vectoriel engendré par une partie.
  $$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
- L'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$ est un ev.
  En effet, c'est le noyau de l'application linéaire
  $$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$
  On peut écrire ce noyau comme espace vectoriel engendré par une partie.
  $$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

III.1.c) Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

Théorème 10.

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\boxed{f \textit{ injective} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f injective. Démontrons que : $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

- ($\supset$) Comme f linéaire, $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.
  Ce qui démontre que : $\mathrm{Ker}(f) \supset \{\overrightarrow{0_E}\}$.
- ($\subset$) Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi :

$$f(\overrightarrow{x}) \ = \ \overrightarrow{0_F} \ = \ f(\overrightarrow{0_E})$$

  L'application f étant injective, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$.
  Ce qui démontre : $\overrightarrow{x} \in \{\overrightarrow{0_E}\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$. Démontrons que f est injective.

Soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ tel que $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{y})$.

On a alors : $f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0_F}$, ce qui s'écrit :

$$f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0_F}$$

Ainsi, $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \in \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$, d'où $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0_E}$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$. $\square$

III.2. Image d'une application linéaire

III.2.a) Définition

Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

On appelle **image de** f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \{\overrightarrow{y} \in F \mid \exists \overrightarrow{x} \in E,\ y = f(\overrightarrow{x})\} \\ & = & \{f(\overrightarrow{x}) \in F \mid \overrightarrow{x} \in E\} \end{array}}$$

III.2.b) Structure de l'image d'une application linéaire

Théorème 11.

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

1) $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$ par définition.

2) $\mathrm{Im}(f) \neq \varnothing$ car $\overrightarrow{0}_F \in \mathrm{Im}(f)$. En effet : $\overrightarrow{0_F} = f(\overrightarrow{0_E})$.

3) Stabilité de $\mathrm{Im}(f)$ par combinaisons linéaires

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) \in (\mathrm{Im}(f))^2$.

Ainsi, il existe $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in E^2$ tel que : $\overrightarrow{y_1} = f(\overrightarrow{x_1})$ et $\overrightarrow{y_2} = f(\overrightarrow{x_2})$.

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 \cdot \overrightarrow{y_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{y_2} & = & \lambda_1 \cdot f(\overrightarrow{x_1}) + \lambda_2 \cdot f(\overrightarrow{x_2}) & \\ & = & f(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{x_2}) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{y_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{y_2} \in \mathrm{Im}(f)$. $\square$

Exemple
Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$.
  Alors $\mathrm{Im}(f) = \{Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ Y = MX\}$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des seconds membres Y tels que le système $MX = Y$ admet une solution.
- Il faut savoir reconnaître les ensembles écrits comme des images.
  Par exemple, $F = \{ \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\} = \mathrm{Im}(f)$
  où l'application linéaire f est définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

  On peut écrire cette image comme espace vectoriel engendré par une partie.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \{x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

III.2.c) Caractérisation de la surjectivité d'une application

Théorème 12.
Soient E et F des espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \text{ surjective} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F}$$

Démonstration.
On ne fait que rappeler ici le résultat obtenu dans le chapitre Ensembles et applications. □

`MÉTHODO` **Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**

Pour démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on peut donc utiliser l'une des propriétés suivantes.

1) Revenir à la définition et vérifier tous les axiomes.
Long et pénible – à éviter.

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel F d'un ev E.
Méthode classique (fonctionne toujours !) à connaître absolument.

3) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_m})$.
Plus élégant et rapide.

4) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Ker}(f)$
où f est une application linéaire.
Plus élégant et rapide.

5) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Im}(f)$
où f est une application linéaire.
Tout aussi élégant et rapide.

IV. Applications linéaires en dimension finie

IV.1. Image d'une application linéaire en dimension finie

Théorème 13.

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Alors $\mathrm{Im}(f)$ *est le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille* $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n}))$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n})\right)}$$

Démonstration.

($\subset$) Soit $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(f)$.
Alors il existe $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$. Le vecteur $\overrightarrow{x}$ se décompose de manière unique sur $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que :

$$\overrightarrow{x} = x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + x_p \cdot \overrightarrow{e_p}$$

Ainsi, par linéarité de f :

$$\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = x_1 \cdot f(\overrightarrow{e_1}) + \dots + x_p \cdot f(\overrightarrow{e_p})$$

Ainsi, $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Vect}\left(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n})\right)$.

($\supset$) Soit $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Vect}\left(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})\right)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\overrightarrow{y} = \lambda_1 \cdot f(\overrightarrow{e_1}) + \ldots + \lambda_p \cdot f(\overrightarrow{e_p}) = f\Big(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \ldots + \lambda_p \cdot \overrightarrow{e_p}\Big)$$

Ainsi, $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(f)$. $\square$

Exemple
On a déjà utilisé cette propriété sans la citer. En effet, si l'on considère de nouveau l'application linéaire f :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors $\mathrm{Im}(f)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \{x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ & & \qquad\ \ \shortparallel \qquad\quad \shortparallel \qquad\quad \shortparallel \\ & = & \mathrm{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right) \end{array}$$

Remarque

- Comme le démontre l'exemple précédent, la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, \overrightarrow{e_n})$ n'est pas forcément libre.
- Si c'est le cas, $(f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Proposition 1.

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$\Leftrightarrow$	*f est injective* *L'image par f de toute famille libre finie de E est une famille (finie) libre de F.*

$\Leftrightarrow$	*f est surjective* *L'image par f de toute famille génératrice finie de E est une famille (finie) génératrice de F.*

$\Leftrightarrow$	*f est bijective* *L'image par f de toute base finie de E est une base (finie) de F.*

Théorème 14.

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.

S'il existe un isomorphisme de E vers F alors $\dim(E) = \dim(F)$.

IV.2. Rang d'une application linéaire

Définition

Soient E et F des ev de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle rang de l'application f et on note $\operatorname{rg}(f)$:

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Remarque

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on sait que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ et on a

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \operatorname{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Théorème 15 (Théorème du rang)**.**

Soient E et F des ev de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) \\ &= \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) \end{aligned}}$$

Exercice

L'appli dérivée de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer le noyau.

c. En déduire la dimension de $\operatorname{Im}(\Phi)$.

d. Vérifier que $\operatorname{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 2.

Soient E et F des ev de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- *f est injective* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
- *f est surjective* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Démonstration.
Application directe du théorème de la bijection. □

Théorème 16 (Caractérisation des isomorphismes)**.**

Soient E et F des ev de dimension finie.

On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow f \text{ est injective } \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

soit

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(F).$$

Dans ce cas, f est un isomorphisme de E vers F.

Exercice
L'application linéaire

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c, a+d, b-c, c) \end{array} \right.$$

est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?

V. Représentations matricielles de vecteurs et d'applications linéaires

V.1. Matrice colonne associée à un vecteur

V.1.a) Définition

Définition *Matrice colonne associée à un vecteur*

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.

- Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\overrightarrow{x} \ = \ x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + x_p \cdot \overrightarrow{e_p}$$

  La base $\mathscr{B}_E$ étant fixée, le vecteur $\overrightarrow{x}$ est entièrement déterminé par la donnée du p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$, que l'on nomme **coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}_E$**.
- Le vecteur $\overrightarrow{x}$ admet alors naturellement une représentation matricielle.
  Il s'agit du vecteur colonne :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

  On parle alors de **vecteur (ou matrice) colonne associé à $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$**. Dans la suite, on notera :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exercice

On note $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Plus précisément :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = X \quad \text{et} \quad P_2(X) = X^2$$

On note $\mathscr{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$ la famille de vecteurs définie par :

$$R_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2$$

On considère : $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. a) Quel est le vecteur colonne associé à P_0 dans la base $\mathscr{B}_1$?
Même question pour P_1 et P_2.

b) Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}_2[X]$?

2. a) Démontrer que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Quel est le vecteur colonne associé à R_0 dans la base $\mathscr{B}_2$?
Même question pour R_1 et R_2.

c) Quel est le vecteur colonne associé à P dans la base $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[X]$?

V.1.b) Isomorphisme de représentation

Théorème 17.

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.

Alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ & & \overrightarrow{x} & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ fixée, ce résultat signifie que :
  - × tout vecteur $\overrightarrow{x}$ possède une unique représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}_E$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle d'un unique vecteur de E.
    (c'est le caractère bijectif)
- Évidemment, si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases différentes de E, on obtient généralement des représentations matricielles $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\overrightarrow{x})$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\overrightarrow{x})$ différentes pour $\overrightarrow{x}$.

V.1.c) Matrice de passage

Définition

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \ldots, \overrightarrow{e_p}')$ deux bases de E.

- On appelle **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la matrice :

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_1'}) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_n'})\Big)}$$

  Autrement dit, la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $\overrightarrow{e_j}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice

On considère de nouveau $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ et $\mathscr{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$.
On note $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

2. Déterminer la matrice de passage Q de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}_1$.

3. a) Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_2$.

b) Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_1$ à l'aide de la formule de changement de base.

c) Écrire alors la formule de chagement de base permettant de déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_2$ connaissant la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_1$.

Démonstration.

1. Exprimons les vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

× $R_0 = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $R_1 = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $R_2 = 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Exprimons les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

× $P_0 = 1 \cdot R_0 + 0 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $P_1 = -1 \cdot R_0 + 1 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $P_2 = 1 \cdot R_0 + 2 \cdot R_1 + 1 \cdot R_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) Comme $T = -4 \cdot R_0 + -3 \cdot R_1 + 2 \cdot R_2$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(T) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) On écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(T) &= \qquad P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \qquad \times \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(T) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) On écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(T) &= \qquad P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} \qquad \times \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(T) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Attention, il s'agit bien de $X = PX'$ et non pas $\cancel{X' = PX}$!

Remarque

- On peut dégager de cette formule une règle d'écriture : les bases en regard de deux objets successifs doivent être les mêmes.
- Plus précisément :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x}) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x})$$

- Dans l'exemple, on démontre que :

$$P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} = (P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2})^{-1}$$

Cette propriété est toujours vérifiée (*cf* théorème suivant).
Dans les énoncés, il est souvent demandé d'exhiber la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ puis de calculer $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$. On peut obtenir cette matrice en déterminant $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. Généralement, on applique plutôt la méthode du pivot de Gauss pour obtenir $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$.

Théorème 18.

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

Soit $\overrightarrow{x} \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x})$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x})$.

1. $\boxed{X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ X'}$ *ou encore* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) \ = \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x})}$

2. $\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}}$

3. *La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et :* $\boxed{(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$

Démonstration.

1. • Soit $\overrightarrow{x} \in E$. On note $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$ et $(x'_1, \dots, x'_p)$ les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$. Autrement dit :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{x} & = & x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + x_p \cdot \overrightarrow{e_p} \\ \text{et } \overrightarrow{x} & = & x'_1 \cdot \overrightarrow{e_1}' + \dots + x'_p \cdot \overrightarrow{e_p}' \end{array}$$

• Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, chaque vecteur $\overrightarrow{e_j}'$ se décompose de manière unique sur cette base. On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{e_1}' & = & r_{11} \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + r_{p1} \cdot \overrightarrow{e_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \overrightarrow{e_p}' & = & r_{1p} \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + r_{pp} \cdot \overrightarrow{e_p} \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{x} & = & x'_1 \cdot (r_{11} \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + r_{p1} \cdot \overrightarrow{e_p}) \\ & + & \dots \\ & + & x'_p \cdot (r_{1p} \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + r_{pp} \cdot \overrightarrow{e_p}) \\ & = & (r_{11}\ x'_1 + \dots + r_{1p}\ x'_p) \cdot \overrightarrow{e_1} \\ & + & \dots \\ & + & (r_{p1}\ x'_1 + \dots + r_{pp}\ x'_p) \cdot \overrightarrow{e_p} \end{array}$$

• Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) & = & \begin{pmatrix} r_{11}\ x'_1 + \dots + r_{1p}\ x'_p \\ \vdots \\ r_{p1}\ x'_1 + \dots + r_{pp}\ x'_p \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & \dots & r_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} = P\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x}) = P\ X' \end{array}$$

2. Soit $\overrightarrow{x} \in E$.
On note : $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x})$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x})$ et $X'' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}''}(\overrightarrow{x})$.
D'après le théorème précédent :

× $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ X'$

× $X' = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}\ X''$

On en déduit que : $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ X' = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}\ X''$.
Toujours d'après le théorème précédent : $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}\ X''$. On en déduit :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}\ X'' \ = \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}\ X''$$

Et donc : $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} - P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''})\ X''$.
Ceci étant vrai pour tout X'', on en conclut que :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} - P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = 0$$

3. Notons $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$.
D'après la proposition précédente : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
Or $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n$ car cette matrice est obtenue en concaténant les vecteurs colonnes associées à $\overrightarrow{e_j}$ dans la base $\mathscr{B}$ et que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. □

V.2. Matrice associée à une application linéaire

V.2.a) Définition

Définition

Soit E et F des espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.

On suppose que F est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_F = (\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** la matrice :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(\overrightarrow{e_1})\big) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(\overrightarrow{e_p})\big)\Big)}$$

Autrement dit, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $f(\overrightarrow{e_j})$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

Remarque

- Si E et F sont de même dimension finie p (par exemple lorsque $E = F$), la matrice associée à f est une matrice carrée de taille n.
- Cette démonstration est analogue à celle faite en début de chapitre lors de l'étude de l'exemple fondamental.
  Dans cet exemple, on a démontré que les seules applications linéaires de $\mathscr{M}_{p1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ s'écrivent naturellement à l'aide d'une matrice. Ici, on travaille dans E (de dimension p) et pas dans $\mathscr{M}_{p1}(\mathbb{R})$. Cependant, l'isomorphisme de représentation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.)$ permet de se ramener à ce cas.
- On pourra retenir le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(.) \\ \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

Exercice

On considère les endomorphismes φ et ψ suivantes.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P'(X) \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array}$$

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Déterminer la matrice représentative de φ dans la base $\mathscr{B}$.

2. Déterminer la matrice représentative de ψ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Écrire la matrice C de φ dans la base canonique

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\texttt{À RETENIR}}$

Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$, on calcule simplement l'image par f de chaque vecteur de la base $\mathscr{B}_E$.

V.2.b) Isomorphisme de représentation

Théorème 19. *Isomorphisme de représentation matricielle*

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

1) Les applications :

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f) \end{cases}$$

sont des isomorphismes.

2) En particulier, on a :

$$\boxed{\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(\mathscr{L}(E)) = n^2}$$

Remarque

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, ce résultat signifie que :
  - × toute application linéaire f possède une unique représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une unique application linéaire φ.
    (c'est le caractère bijectif)
- En plus d'être une application bijective, φ est linéaire. Ainsi, la matrice d'une combinaison linéaire d'applications est la combinaison linéaire des matrices des applications.
  Plus précisément, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \lambda_2 \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$$

V.3. Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices associées

V.3.a) Noyau d'une application linéaire via la matrice associée

Théorème 20.

Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et $\overrightarrow{y} \in F$.

1.
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\overrightarrow{y}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(\overrightarrow{x})\Big) \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\overrightarrow{y}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) \end{array}}$$

2. En particulier : $\boxed{\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) = 0}$

Démonstration.

1.

2. • Soit $\overrightarrow{x} \in E$. On note $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Alors} & \overrightarrow{x} & = & x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + x_p \cdot \overrightarrow{e_p} \\ \text{et} & f(\overrightarrow{x}) & = & x_1 \cdot f(\overrightarrow{e_1}) + \dots + x_p \cdot f(\overrightarrow{e_p}) \end{array}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{x}$ étant connues, le vecteur $f(\overrightarrow{x})$ est entièrement déterminé par l'image de la base $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ par la fonction f.

• Comme $\mathscr{B}_F$ est une base de F, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, le vecteur $f(\overrightarrow{e_j})$ se décompose de manière unique sur cette base.
On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{array}{rcl} f(\overrightarrow{e_1}) & = & a_{11} \cdot \overrightarrow{f_1} + \dots + a_{n1} \cdot \overrightarrow{f_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f(\overrightarrow{e_p}) & = & a_{1p} \cdot \overrightarrow{f_1} + \dots + a_{np} \cdot \overrightarrow{f_n} \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(\overrightarrow{x}) & = & x_1 \cdot (a_{11} \cdot \overrightarrow{f_1} + \ldots + a_{n1} \cdot \overrightarrow{f_p}) \\ & + & \ldots \\ & + & x_p \cdot (a_{1p} \cdot \overrightarrow{f_1} + \ldots + a_{np} \cdot \overrightarrow{f_p}) \\ & = & (a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1p}\ x_p) \cdot \overrightarrow{f_1} \\ & + & \ldots \\ & + & (a_{n1}\ x_1 + \ldots + a_{np}\ x_p) \cdot \overrightarrow{f_p} \end{array}$$

- Alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(\overrightarrow{x})) & = & \begin{pmatrix} a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1p}\ x_p \\ a_{21}\ x_1 + \ldots + a_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ a_{n1}\ x_1 + \ldots + a_{np}\ x_p \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

□

Remarque

Il est fréquent qu'une application linéraire f soit donnée seulement par sa matrice dans certaines bases. Lorsque l'on doit calculer $f(\overrightarrow{x})$, on doit alors jongler avec les notations.

Exercice `(EDHEC 2016)`

On note $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Dans la suite, on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On note : $\overrightarrow{u_1} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{u_2} = (0,1,1)$.
On pose enfin : $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.

2. Montrer que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Vérfier que la matrice T de f dans la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont égaux à 2.

V.3.b) Composée d'applications linéaires et produit matriciel

Théorème 21.

Soient E, F, et G des vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de E, F, et G.

1) *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$:*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)}$$

(la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées)

2) *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}\big(f^k\big) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)\big)^k}$$

(où l'on a noté $f^k = f \circ \ldots \circ f$)

Théorème 22.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1) $\boxed{f \text{ est bijective} \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est inversible}}$

2) *Si f est bijective alors :* $\boxed{\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f^{-1}\big)}$

Remarque

- Lorsqu'on dispose d'un endomorphisme et de sa matrice dans une base, pour savoir si l'endomorphisme est bijectif, il suffit de regarder si sa matrice est inversible.
- On pourra notamment penser à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer si A est inversible.

V.4. Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de la matrice associée

Théorème 23.

Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f))}$$

Démonstration.
Soit $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Il reste alors à démontrer que : $\mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}(f(e_1)), \dots, \mathrm{Mat}(f(e_n)))$.
□

Théorème 24.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{A \textit{ est inversible} \Leftrightarrow A \textit{ est la matrice associée à un isomorphisme}}$$

Remarque
f inv.
ssi