Feuille d'exercices n°7 : Applications linéaires

Matrice de passage, formule de changement de base

Exercice 19. (★★) *(d'après* `EDHEC 2006`*)*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. a) Montrer : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$.

Démonstration.

- Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $V = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} v \in \text{Ker}(f) & \iff & f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \iff & A\,V = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 0 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 0 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 0 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & 10\,y & = & -7\,z \\ & - & 2\,y & = & z \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 5\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & & & = & -2\,z \\ & - & 2\,y & = & z \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \text{Ker}(f) & = & \{v \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \texttt{ ET } y = -\frac{1}{2}\,z\right\} \\ & = & \left\{(-z, -\frac{1}{2}\,z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} \\ & = & \left\{z \cdot (-1, -\frac{1}{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} \\ & = & \text{Vect}\left((-1, -\frac{1}{2}, 1)\right) \ = \ \text{Vect}\left((2, 1, -2)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \text{Ker}(f) = \text{Vect}(u).}$$

□

b) La matrice A est-elle inversible ?

Démonstration.
D'après la question précédente : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
On en déduit que l'application f n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective.

$$\boxed{\text{On en conclut que } A\text{, matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathscr{B}\text{, n'est pas inversible.}}$$ □

2. a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

Démonstration.
Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
On cherche un vecteur v dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. On considère donc : $y = 1$.

$$\begin{array}{cl}
 & f(v) = u \\[2mm]
\iff & A\,V = U \\[2mm]
\iff & \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\[4mm]
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & -2 \end{array} \right. \\[4mm]
\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 7\,z & = & -8 \\ & - & z & = & 2 \end{array} \right. \qquad \textit{(car } y = 1\textit{)} \\[4mm]
\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 7\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & 6 \\ & - & z & = & 2 \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Le seul vecteur } v \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(v) = u \text{ est } v = (3, 1, -2).}$$ □

b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.

Démonstration.

Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $W = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On cherche un vecteur w dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. On considère donc : $y = 1$.

$$\begin{array}{cl}
 & f(w) = v \\
\Longleftrightarrow & A\,W = V \\
\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 3 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & -2 \end{array} \right. \\
\underset{\Longleftrightarrow}{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 3 \\ & - & 2\,y & - & z & = & -1 \\ & & 2\,y & + & z & = & -1 \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 7\,z & = & -7 \\ & - & z & = & 1 \end{array} \right. \qquad (car\ y = 1) \\
\underset{\Longleftrightarrow}{L_1 \leftarrow L_1 + 7\,L_2} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & 0 \\ & - & z & = & 1 \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Le seul vecteur } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(w) = v \text{ est } w = (0, 1, -1).}$$

Commentaire

- L'énoncé précise qu'il faut trouver **le** vecteur w tel que $f(w) = v$. Ainsi, vérifier :
$$f\big((0, 1, -1)\big) = (3, 1, -2)$$
ne suffit pas. Il faut aussi démontrer qu'il n'y a pas d'autre vecteur qui vérifie cette propriété.
- Si la fonction f était injective, on pourrait facilement démontrer que la propriété de l'énoncé est vérifiée par un seul vecteur. En effet, si s et t vérifie cette propriété, alors :
$$f(s) = v = f(t)$$
et ainsi, par linéarité : $f(s - t) = 0_{\mathbb{R}^3}$. D'où $s - t \in \text{Ker}(f)$.
Et ainsi, si f injective, on en conclut que $s = t$.
- L'intérêt de la formulation de cette question est qu'elle fournit le vecteur v de la question précédente. Cela permet de vérifier la calcul précédent et, le cas échéant, de le rectifier. Qu'on réussisse ou non ces deux questions, on peut faire la suite car la famille (u, v, w) est en fait donnée par l'énoncé.

$\square$

c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathscr{B}'$.
On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\big((2, 1, -2), (3, 1, -2), (0, 1, -1)\big)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (2, 1, -2) + \lambda_2 \cdot (3, 1, -2) + \lambda_3 \cdot (0, 1, -1) = (0, 0, 0) \quad (*)$$

Or :

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\ \lambda_1 & + & 3\ \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\ \lambda_1 & - & 2\ \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{\substack{L_2 \leftarrow 2\ L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\ \lambda_1 & + & 3\ \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\ \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\ \lambda_1 & + & 3\ \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\ \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

La famille (u, v, w) est donc libre.

- De plus, $\text{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{La famille } (u, v, w) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

3. a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $f(u) = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.

On en déduit que $\text{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- D'après la question ***2.a)*** : $f(v) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.

On en déduit que $\text{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- D'après la question ***2.b)*** : $f(w) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$.

On en déduit que $\text{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(w)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N = \text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- La matrice N est triangulaire supérieure.
  Ses cœfficients diagonaux sont donc ses valeurs propres et $\text{Sp}(N) = \{0\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(N) = \{0\}. \text{ L'endomorphisme } f \text{ a pour seule valeur propre } 0.}$$

- Supposons par l'absurde que f est diagonalisable.
  Il existe alors une base $\mathscr{B}'' = (e_1'', e_2'', e_3'')$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} & \text{Mat}_{\mathscr{B}''}(f) & P_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}} \\ & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ & & P & D & P^{-1} \end{array}$$

Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)})$$

L'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ étant bijective, on en déduit :

$$f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$$

Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Il étatit possible de rédiger différemment la dernière partie de la question en prenant le parti de diagonaliser la matrice représentative de f. Détaillons cette rédaction.
- Supposons que f est diagonalisable. Alors A est diagonalisable. Il existe alors :
  × une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible,
  × une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

  telles que :
  $$A = PDP^{-1}$$
  Or $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f) = \{0\}$. Donc : $D = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
  Et ainsi :
  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)})$$
  On peut alors conclure comme ci-dessus.
- Cette question est un grand classique des sujets. Il faut donc savoir la traiter correctement, en adoptant l'un ou l'autre des rédactions ci-dessus.

□

b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = O$.

Démonstration.

- D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ A & & P & N & P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{A = PNP^{-1}}$$

- Par une récurrence immédiate, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PN^kP^{-1}$.
- Or :

$$N^2 = N \times N \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$N^3 = N \times N^2 \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit par une récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 3,\ N^k = O. \\ \textit{(on peut aussi écrire : } \forall k \geqslant 3,\ N^k = N^3 \times N^{k-3} = O\textit{)} \end{array}}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall k \geqslant 3,\ A^k = POP^{-1} = O.}$$

□

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A),

a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{Vect}\big(I, N, N^2\big)$.
On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $C_N = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$.
  Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} M \in C_N & \Leftrightarrow & MN = NM \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} C_N & = & \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MN = NM\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mid d = g = h = 0 \ \texttt{ET} \ a = e = i \ \texttt{ET} \ b = f\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \text{Vect}\left(I, N, N^2\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } C_N \text{ est un espace vectoriel et } C_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right).}$$

□

b) Établir que : $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$.
En déduire que $C_A = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} M \in C_A & \Leftrightarrow & M \text{ commute avec } A & \\ & \Leftrightarrow & AM = MA & \\ & \Leftrightarrow & PNP^{-1}M = MPNP^{-1} & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}(PNP^{-1}M) = P^{-1}(MPNP^{-1}) & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & NP^{-1}M = P^{-1}MPNP^{-1} & \\ & \Leftrightarrow & (NP^{-1}M)P = (P^{-1}MPNP^{-1})P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & N(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)N & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ commute avec } N & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in C_N & \end{array}$$

$$\boxed{M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N}$$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rcl} M \in C_A & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in C_N \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in \text{Vect}\left(I, N, N^2\right) \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \ P^{-1}MP = a \cdot I + b \cdot N + c \cdot N^2 \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad M \ = \ P\ (a \cdot I + b \cdot N + c \cdot N^2)\ P^{-1} \\ & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \ = \ (a \cdot P + b \cdot PN + c \cdot PN^2)\ P^{-1} \\ & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \ = \ a \cdot PP^{-1} + b \cdot PNP^{-1} + c \cdot PN^2P^{-1} \\ & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \ = \ a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2 \\ & \Leftrightarrow & M \in \text{Vect}\left(I, A, A^2\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } C_A = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right).}$$

- Démontrons que la famille (I, A, A^2) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 = O \quad (*)$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 \\
= \ & \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot PNP^{-1} + \lambda_3 \cdot PN^2P^{-1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b}}\textit{)} \\
= \ & P \left(\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot N + \lambda_3 \cdot N^2\right) P^{-1} && \textit{(car } I = PP^{-1}\textit{)} \\
= \ & P \left(\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) P^{-1} \\
= \ & P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après $(*)$: $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} \ = \ POP^{-1} \ = \ O$.

Et par multiplication à gauche par P^{-1} puis à droite par P :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \ = \ O$$

On en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre.}}$$

- La famille (I, A, A^2) :
  - × engendre C_A,
  - × est libre.

  La famille (I, A, A^2) est une base de C_A.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(C_A) = \mathrm{Card}((I, A, A^2)) = 3.}$$

□