CH VIII : Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Avant d'entamer ce chapitre, il faut être à l'aise avec la notion de v.a.r. discrètes (*cf* chapitre précédent). Si X est une v.a.r. discrète, on rappelle que $X(\Omega)$ peut se noter sous la forme :

$$X(\Omega) \ = \ \{x_i \mid i \in I\} \quad \text{où } I \subset \mathbb{N}$$

(par définition, $X(\Omega)$ est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$)

I. Lois associées à un couple de v.a.r. discrètes

I.1. Loi d'un couple de v.a.r. discrètes

I.1.a) Définition de la notion de couple de v.a.r.

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

- On appelle couple de v.a.r. (X, Y) l'application définie par :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Exemple

1) On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

- On note X la v.a.r. égale au plus petit des deux résultats obtenus.
- On note Y la v.a.r. égale au plus grand des deux résultats obtenus.

Alors, (X, Y) est un couple de v.a.r. discrètes.

2) Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules vertes et 5 boules bleues. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

- On note X la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues.
- On note Y la v.a.r. égale au nombre de boules vertes obtenues.

Alors, (X, Y) est un couple de v.a.r. discrètes.

3) On lance indéfiniment une pièce non équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{3}{4}$ (et celle d'obtenir Face vaut donc $\frac{1}{4}$).
On appelle chaîne toute séquence constituée uniquement de Pile ou uniquement de Face.

- On note X la v.a.r. égale à longueur de la première chaîne obtenue.
- On note Y la v.a.r. égale à la longueur de la deuxième chaîne.

Alors, (X, Y) est un couple de v.a.r. discrètes.
(par exemple, si $\omega = PPPPFFP\ldots$, $X(\omega) = 4$ et $Y(\omega) = 2$)

4) On dispose d'une pièce de monnaie et d'une urne contenant en tout $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$) dont n sont blanches et n sont noires. L'expérience aléatoire consiste à lancer la pièce jusqu'à obtenir le premier pile. Puis à tirer autant de tirages avec remise dans l'urne que de lancers effectués pour obtenir Pile.

- On note X la v.a.r. égale au nombre de lancers de pièce effectués.
- On note Y la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues lors des tirages.

Alors, (X, Y) est un couple de v.a.r. discrètes.

I.1.b) Loi d'un couple de v.a.r. discrètes

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

- On appelle **loi de probabilité du couple** (X, Y) ou **loi conjointe des v.a.r.** X **et** Y et on note $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ l'application :

$$\boxed{\begin{array}{lccccccl} \mathbb{P}_{(X,Y)} & : & X(\Omega) & \times & Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} & \\ & & (x & , & y) & \mapsto & \mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) & = \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \end{array}}$$

- Autrement dit, la loi du couple (X, Y) est la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour x décrivant $X(\Omega)$ et y décrivant $Y(\Omega)$ ($i.e.$ (x, y) décrivant $X(\Omega) \times Y(\Omega)$).

  (c'est cette définition que l'on retiendra)

Remarque

- Dans la littérature, on pourra trouver la notation $[(X, Y) = (x, y)]$ ou $[X = x, Y = y]$ en lieu et place de $[X = x] \cap [Y = y]$.
- Si X est une v.a.r. discrète, on rappelle qu'on a utilisé une notation similaire ($\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}([X = x])$) pour définir la loi de la v.a.r. X.
  (à ne pas confondre avec la fonction de répartition F_X !)
- Dans le cas d'un couple (X, Y) composé de deux v.a.r. X et Y finies, on peut représenter la loi de (X, Y) sous forme d'un tableau à double entrée.

Exemple

1) On reprend l'exemple ***1)*** précédent consistant à lancer deux dés à 6 faces.

× $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \text{Card}([\![1, 6]\!]^2) = 6 \times 6 = 36$.

× Ω est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
($(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé)

On a donc :

$$\forall A \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A)}{36}$$

- Déterminons la loi de (X, Y).
  Tout d'abord : $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.
- Soit $i \in [\![1, 6]\!]$ et soit $j \in [\![1, 6]\!]$.

	L'événément $[X = i] \cap [Y = j]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événément $[X = i]$ est réalisé	et	l'événement $[Y = j]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	Le plus petit des 2 résultats obtenus vaut i	et	le plus grand des 2 résultats obtenus vaut j

  Trois cas se présentent.

  × Si $i > j$, alors :
  $$[X = i] \cap [Y = j] = \varnothing$$
  En effet, le plus petit des deux résultats ne peut être strictement plus grand que le plus grand.

  × Si $i < j$, alors :
  $$[X = i] \cap [Y = j] = \{(i, j), (j, i)\}$$
  (cet événement est réalisé par deux 2-tirages : celui où le 1^{er} dé vaut i et le suivant j et celui où le premier dé vaut j et le suivant i)

× Si $i = j$, alors :
$$[X = i] \cap [Y = j] = \{(i, i)\}$$
(cet événement est réalisé par un unique 2-tirages : le 1^{er} lancer donne i et le deuxième aussi)

- On en conclut :
$$\forall (i,j) \in [\![1,6]\!]^2,\ \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \begin{cases} \frac{0}{36} & \text{si } i > j \\ \frac{2}{36} & \text{si } i < j \\ \frac{1}{36} & \text{si } i = j \end{cases}$$

- Ce résultat peut aussi être présenté sous forme de tableau.

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

2) On reprend maintenant le deuxième exemple.
On note $B = \{b_1, \dots, b_{12}\}$ l'ensemble de boules de l'urne.
(les boules b_1, …, b_3 sont blanches, les boules b_4, …, b_7 sont vertes et les boules b_8, …, b_{12} sont bleues).

× Ω est l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble B.
Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \binom{12}{3} = 220$.

× Ω est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
($(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé)

On a donc :
$$\forall A \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A)}{220}$$

- Déterminons la loi de (X, Y).
Tout d'abord : $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,3]\!]$.
- Soit $i \in [\![0,3]\!]$ et soit $j \in [\![0,3]\!]$.

	L'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événement $[X = i]$ est réalisé	et	l'événement $[Y = j]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	Le 3-tirage contient i boules blanches	et	le 3-tirage contient j boules vertes

Un 3-tirage réalisant $[X = i] \cap [Y = j]$ est entièrement déterminé par :
× le choix des i boules blanches tirées : $\binom{3}{i}$ possibilités.
× le choix des j boules vertes tirées : $\binom{4}{j}$ possibilités.
× le choix des boules complétant le tirage : $\binom{5}{3-i-j}$ possibilités.
(ce sont forcément des boules vertes)

- On en conclut :
$$\forall (i,j) \in [\![0,3]\!]^2,\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{5}{3-i-j}}{\binom{12}{3}}$$

- Ce résultat peut aussi être représenté sous forme de tableau.

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	0	1	2	3
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0

Remarque
De ces premières études, on peut tirer plusieurs remarques.

- Afin de déterminer la loi d'un couple (X, Y), on commence `TOUJOURS` par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- Il est fréquent d'avoir à réaliser une disjonction de cas lorsque l'on détermine la loi d'un couple de v.a.r. .
- Si l'on somme tous les éléments du tableau, on obtient 1.
  (c'est une mesure de vérification !)
  Ceci provient du fait que $([X = x] \cap [Y = y])_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est **le système complet d'événements associé au couple** (X, Y).

I.1.c) Système complet d'événements associé à un couple de v.a.r. discrètes

Définition
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

- On appelle **le système complet d'événements associé au couple** (X, Y) la famille :
$$\big([X = x] \cap [Y = y] \big)_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$$
- Cette famille est un système complet d'événements. En particulier :
$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \Big(\sum_{y \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big) \\ &= \sum_{y \in X(\Omega)} \Big(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big) = 1\end{aligned}$$

Démonstration.

1) Démontrons que cette famille est constituée d'événements 2 à 2 incompatibles. Choisissons deux événements distincts de cette famille.
Soit $(x_1, y_1) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et $(x_2, y_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tels que :
$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$$
On a alors :
$$\begin{aligned} & ([X = x_1] \cap [Y = y_1]) \cap ([X = x_2] \cap [Y = y_2]) \\ = \ & ([X = x_1] \cap [X = x_2]) \cap ([Y = y_1] \cap [Y = y_2]) \\ = \ & \varnothing \end{aligned}$$
En effet, on a forcément $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$ car $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

2) Démontrons que la réunion de ces événements est Ω.

$$\begin{array}{cl}
& \bigcup\limits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} [X=x] \cap [Y=y] \\
= & \bigcup\limits_{x\in X(\Omega)} \left(\bigcup\limits_{y\in Y(\Omega)} [X=x] \cap [Y=y] \right) \\
= & \bigcup\limits_{x\in X(\Omega)} \left([X=x] \cap \left(\bigcup\limits_{y\in Y(\Omega)} [Y=y] \right) \right) \quad \textit{(car $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$)} \\
= & \bigcup\limits_{x\in X(\Omega)} ([X=x] \cap \Omega) \quad \textit{(car $([Y=y])_{y\in Y(\Omega)}$ est un sce)} \\
= & \bigcup\limits_{x\in X(\Omega)} [X=x] \ = \ \Omega \quad \textit{(car $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$ est un sce)}
\end{array}$$

On en déduit notamment :

$$\begin{array}{cl}
& \sum\limits_{x\in X(\Omega)} \sum\limits_{y\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) \\
= & \sum\limits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) \\
= & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} [X=x] \cap [Y=y] \Big) \\
= & \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1
\end{array}$$

□

Remarque
On souligne que cette démonstration est valable dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis mais aussi dans le cas où ils sont infinis (dénombrables). Cela implique alors que les sommes considérées sont infinies.

I.2. Lois conditionnelles

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

1) • Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([Y=y]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de X sachant (que l'événement)** $[Y=y]$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_{[Y=y]}([X=x]) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y])}{\mathbb{P}([Y=y])} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de X sachant $[Y=y]$ est la donnée des réels :

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([X=x]) \text{ pour tout } x \in X(\Omega)$$

2) • Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X=x]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de Y sachant (que l'événement)** $[X=x]$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \mathbb{P}_{[X=x]}([Y=y]) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y])}{\mathbb{P}([X=x])} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=x]$ est la donnée des réels :

$$\mathbb{P}_{[X=x]}([Y=y]) \text{ pour tout } y \in Y(\Omega)$$

Remarque
Soit $x \in X(\Omega)$ tel que : $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$.
Par définition : $\mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbb{P}([X = x])}$

- Ainsi, si on connaît :
  - × la loi du couple (X, Y),
  - × la loi de X,

  alors on obtient la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.
- On peut aussi lire l'égalité dans l'autre sens. Si on connaît :
  - × la loi de X,
  - × la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$,

  alors on obtient la loi du couple (X, Y).

I.3. Lois marginales

I.3.a) Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

- On appelle 1$^{\text{ère}}$ **loi marginale du couple** (X, Y) la loi de la v.a.r. X.
- On appelle 2$^{\text{ème}}$ **loi marginale du couple** (X, Y) la loi de la v.a.r. Y.

Remarque
L'expression « loi marginale » n'a de sens que dans un contexte d'étude d'un couple de v.a.r. (X, Y). Aux concours, cette expression ne sera pas forcément utilisée, même dans les sujets sur les couples. On parlera alors tout simplement de loi de X (resp. Y) en lieu et place de 1$^{\text{ère}}$ (resp. 2$^{\text{ème}}$) loi marginale du couple (X, Y).

I.3.b) Détermination en pratique des lois marginales

Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

1) *Loi de X via la loi du couple (X, Y)*

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$$

Loi de X via les lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$:

On suppose : $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}([X = x]) \ = \ \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y])\ \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])}$$

2) *Loi de Y via la loi du couple (X, Y)*

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([Y = y]) \ = \ \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [X = x])}$$

Loi de Y via les lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$:

On suppose : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = y]) \ = \ \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x])\ \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y])}$$

Démonstration.

- Les v.a.r. X et Y jouent des rôles analogues.
  Ainsi, les démonstrations des points ***1)*** et ***2)*** sont similaires.
  Démontrons le point ***1)***.
- La famille $\big([Y = y]\big)_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce.
  Soit $x \in X(\Omega)$. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big([X = x]\big) \ = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$$

- Si on sait de plus : $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Y = y]\big) \times \mathbb{P}_{[Y=y]}\big([X = x]\big)$$

□

Remarque

- On retiendra que pour obtenir une loi marginale à partir de la loi du couple ou d'une loi conditionnelle, il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales.
- Cela permet de construire des énoncés du type :
  1) Reconnaître la loi de X.
  2) Déterminer la loi du couple (X, Y) *(si l'énoncé a un parti-pris couple)*.

  OU

  Pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ *(si l'énoncé a un parti-pris couple)*.
  3) Déterminer la loi de Y.
- Rappelons enfin que les sommes présentes dans la formule des probabilités totales peuvent être infinies. C'est le cas si les ensembles images des v.a.r. considérées sont infinies. Les écritures restent vraies sans ajout d'autre hypothèse.

Exemple

Lorsque les v.a.r. X et Y sont finies, la formule :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x]) \ = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

peut se lire sur le tableau de la loi du couple (X, Y).
Reprenons l'exemple du double lancer de dé 6.

$y \in Y(\Omega)$ / $x \in X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6	Loi de X
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Loi de Y	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

Si $x = 1$, alors la formule se lit : $\mathbb{P}([X = 1]) \ = \sum\limits_{j=1}^{6} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j])$.

Ainsi, on obtient $\mathbb{P}([X = 1])$ en sommant tous les éléments de la première ligne. De manière générale, on obtient $\mathbb{P}([X = i])$ en sommant tous les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Exercice
On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et face avec probabilité $q = 1-p$. On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.
Les lancers sont considérés indépendants.

1. Déterminer la loi de X.

2. Parti-pris couple :
Déterminer la loi du couple (X,Y).
Parti-pris lois conditionnelles :
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$.

3. En déduire la loi de Y.

4. Que vaut $\sum\limits_{j=2}^{+\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \right)$?
Retrouver ce résultat par calcul.

5. Parti-pris lois conditionnelles :
Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\sum\limits_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j])$?
Retrouver ce résultat par calcul.

Démonstration.

1.
- L'expérience consiste ici en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) indépendantes et de même paramètre de succès p (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. X est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

2. Parti-pris couple.

- Tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
En effet, le premier Pile peut apparaître dès le premier tirage ; le deuxième apparaît au mieux lors du deuxième tirage.
- Déterminons la loi du couple (X,Y).
Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

	L'événement $[X=i] \cap [Y=j]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événement $[X=i]$ est réalisé	et	l'événement $[Y=j]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	Le 1$^{\text{er}}$ Pile est obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage	et	le 2$^{\text{ème}}$ Pile est obtenu au $j^{\text{ème}}$ tirage

Deux cas se présentent.
  × Si $i \geqslant j$, alors :
$$[X=i] \cap [Y=j] \ = \ \varnothing$$
En effet, le premier pile ne peut apparaître après le deuxième.
Ainsi : $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  × Si $i < j$, alors :
$$[X=i] \cap [Y=j] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \ldots \cap F_{j-1} \cap P_j$$
Par indépendance des lancers, on a alors :
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \\ = \ & \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_{i-1}) \times \mathbb{P}(P_i) \times \mathbb{P}(F_{i+1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_{j-1}) \times \mathbb{P}(P_j) \\ = \ & q^{i-1} \ p \ q^{j-i-1} \ p \\ = \ & q^{j-2} \ p^2 \end{aligned}$$

Parti-pris lois conditionnelles.

- Tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
En effet, le premier Pile peut apparaître dès le premier tirage ; le deuxième apparaît au mieux lors du deuxième tirage.

- Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Déterminons la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$. Deux cas se présentent.
  - × Si $j \leqslant i$, alors :
  $$\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = \frac{\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])}{\mathbb{P}([X = i])} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}([X = i])} = 0$$
  En effet, le premier pile ne peut apparaître après le deuxième.
  - × Si $j > i$:
    - Si $[X = i]$ est réalisé, c'est que le premier Pile apparaît lors du $i^{\text{ème}}$ tirage. Dans ce cas, l'événement $[Y = j]$ est réalisé si et seulement si le deuxième Pile apparaît lors du $j^{\text{ème}}$ tirage.
    - Après ces i premiers tirages, l'expérience consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) indépendantes et de même paramètre de succès p (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
    - La loi conditionnelle de Y sachant (que l'événement) $[X = i]$ (est réalisé) est celle d'une v.a.r. $i + T$ où $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. En effet, le rang d'apparition du deuxième Pile est donné par le nombre i de tirages effectués dans l'expérience initiale auquel on ajoute au rang d'apparition du premier Pile (donné par T) dans l' expérience débutant après ces i tirages.

  Ainsi, pour tout $j > i$:
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X=i]}\big([Y = j]\big) &= \mathbb{P}\big([i + T = j]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([T = j - i]\big) \ = \ q^{j-i-1}\, p\end{aligned}$$

Remarque

- Généralement, la loi conditionnelle à déterminer est une loi usuelle (*cf* exercice suivant). Le parti-pris lois conditionnelles ne semble pas forcément pertinent ici puisque la loi conditionnelle n'est pas directement une loi usuelle mais la loi d'une transformée affine d'une loi usuelle.
- On pouvait rédiger en revenant à la loi de couple en écrivant :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) &= \frac{\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])}{\mathbb{P}([X = i])} \\ &= \frac{\mathbb{P}\big(F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \ldots \cap F_{j-1} \cap P_j\big)}{\mathbb{P}\big(F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i\big)} \\ &= \ldots \qquad \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= \frac{q^{i-1}\, p\, q^{j-i-1}\, p}{q^{i-1}\, p} \ = \ q^{j-i-1}\, p\end{aligned}$$
  Dans ce cas, il serait préférable que l'exercice soit présenté avec un parti-pris couple.

3. La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un sce.
Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. D'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([Y = j]) \\ =\ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ =\ & \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) + \cancel{\sum_{\substack{i=1 \\ i \geqslant j}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])} \\ =\ & \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])\end{aligned}$$

Parti-pris couple.
$$\sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \ = \ \sum_{i=1}^{j-1} q^{j-2}\, p^2 \ = \ (j-1)\, q^{j-2}\, p^2$$

Parti-pris lois conditionnelles.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X=i])\, \mathbb{P}_{[X=i]}\, \mathbb{P}([Y=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} q^{i-1}\, p\, q^{j-i-1}\, p \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} q^{j-2}\, p^2 \;=\; (j-1)\, q^{j-2}\, p^2
\end{aligned}$$

4. • $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \Big) = 1$. En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \;\cap\; [Y=j] \Big) &= \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}} [X=i] \cap [Y=j] \Big) \;=\; \mathbb{P}(\Omega) \;=\; 1
\end{aligned}$$

car la famille $([X=i] \cap [Y=j])_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}}$ forme un sce.

• On peut retrouver ce résultat par calcul.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \;\cap\; [Y=j]) \Big) &= \sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=j]) \\
&= \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1)\, q^{j-2}\, p^2 \;=\; p^2 \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1)\, q^{j-2} \\
&= p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j\, q^{j-1} \;=\; p^2\, \frac{1}{(1-q)^2} \;=\; \frac{p^2}{p^2} \;=\; 1
\end{aligned}$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison q.

5. • Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) = 1$.

En effet :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) \;=\; \mathbb{P}_{[X=i]}(\bigcup_{j=2}^{+\infty} [Y=j]) \;=\; \mathbb{P}_{[X=i]}(\Omega) \;=\; 1$$

car la famille $([Y=j])_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}$ forme un sce.

• On peut retrouver ce résultat par calcul.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) &= \sum_{j=2}^{i} \cancel{\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j])} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) \\
&= \sum_{j=i+1}^{+\infty} q^{j-i-1}\, p \;=\; p \sum_{j=i+1}^{+\infty} q^{j-i-1} \\
&= p \sum_{j=0}^{+\infty} q^j \;=\; p\, \frac{1}{1-q} \;=\; \frac{p}{p} \;=\; 1
\end{aligned}$$

□

Exercice

Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0,1[$), et celle d'obtenir face est $q = 1-p$.

Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.

Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

1. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$.

2. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

3. Montrer : $\mathbb{P}([Y=0]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

Montrer : $\mathbb{P}([Y=n]) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.

5. On admet : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k-1}{m-1} x^k = \frac{x^m}{(1-x)^m}$.

Montrer : $\mathbb{P}([Y=n]) = \dfrac{1}{(1+q)^2} \left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

1. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$.

Démonstration.

- L'expérience consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) indépendantes et de même paramètre de succès p (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. X est le rang d'apparition du premier succès.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

- Soit $k \geqslant 1$. Déterminons la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$.
  - Si $[X=k]$ est réalisé, c'est que le premier Pile a été obtenu lors du $k^{\text{ème}}$ lancer. Dans ce cas, le joueur B procède alors à k lancers de pièces.
  - Cette expérience consiste en la répétition de k épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) indépendantes, de même paramètre de succès p (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
  - La v.a.r. Y compte le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

  Ainsi, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$ est la loi binomiale de paramètre (k,p).

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall i \in [\![0,k]\!],\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) = \dbinom{k}{i} p^i\ (1-p)^{k-i} \\ \forall i \geqslant k+1,\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i]) = 0 \end{array}}$$

Remarque
On comprend dans cette question tout l'intérêt des lois conditionnelles : on effectue d'abord une expérience initiale dont le résultat défini l'expérience qui va suivre. La v.a.r. X dépend du résultat de l'expérience initiale. La v.a.r. Y dépend du résultat de la deuxième expérience (qui dépend elle-même de la $1^{\text{ère}}$). Il est donc logique de vouloir déterminer la loi de la v.a.r. Y connaissant le résultat de l'expérience initiale. □

2. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

Démonstration.

- On a vu dans la question précédente que si $[X=k]$ est réalisé alors Y peut prendre toutes les valeurs de $[\![0,k]\!]$.
- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors X peut prendre toutes les valeurs $k \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

Remarque
On peut faire cette démonstration en revenant une nouvelle fois à l'expérience réalisée :

× pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le joueur B peut obtenir i piles. Cela est notamment réalisé si le joueur A a obtenu le premier pile lors de son $i^{\text{ème}}$ lancer et si le joueur B n'a obtenu que des piles lors de ses lancers.

× le joueur B peut aussi obtenir 0 pile et ce quel que soit le nombre de tirages dont il dispose.

□

3. Montrer : $\mathbb{P}([Y=0]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}$.

Démonstration.
La famille $\Big([X=k]\Big)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=0]) & \textit{(valide car } \mathbb{P}([X=k])\neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\ p \times \dbinom{k}{0}\ p^0\ (1-p)^{k-0} & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-1}\ p \ = \ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p\ q^{2k-1} & \\
& = & p \sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} \ = \ p \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^{2(k+1)-1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^{2k+1} \ = \ pq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k & \\
& = & pq\ \dfrac{1}{1-q^2} & \textit{(car } q^2 \in\ ]-1,1[\textit{)} \\
& = & \cancel{p}\ q\ \dfrac{1}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} \ = \ \dfrac{q}{1+q} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=0]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}}$$

□

4. Soit n un entier naturel non nul.
Montrer : $\mathbb{P}([Y=n]) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dbinom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.

Démonstration.

- La famille $\Big([X=k]\Big)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{P}([Y=n]) & \\
= & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=n]) & \\
= & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \textit{(valide car } \mathbb{P}([X=k])\neq 0\textit{)} \\
= & \cancel{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n])} & \textit{(car pour tout } k<n, \ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n])=0\textit{)} \\
& + \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \\
= & \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \\
= & \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\ p\ \dbinom{k}{n}\ p^n\ (1-p)^{k-n} & \\
= & \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dbinom{k}{n}\ p^{n+1}\ (1-p)^{2k-n-1} & \\
= & \dfrac{p^{n+1}}{(1-p)^{n+1}} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dbinom{k}{n}\ (1-p)^{2k} \ = \ \dfrac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dbinom{k}{n}\ \left(q^2\right)^k &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=n]) \ = \ \dfrac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dbinom{k}{n}\ \left(q^2\right)^k}$$

□

5. On admet : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \,]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k-1}{m-1}\, x^k \;=\; \frac{x^m}{(1-x)^m}$.

Montrer : $\mathbb{P}([Y=n]) = \dfrac{1}{(1+q)^2} \left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([Y=n]) \;=\; \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k$$

- Or, par décalage d'indice :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k \;=\; \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^{k-1} \;=\; \frac{1}{q^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^k$$

- En appliquant la formule fournie par l'énoncé à $m = n+1 \in \mathbb{N}^*$, et $x = q^2 \in \,]0,1[$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^{k-1} \;=\; \frac{\left(q^2\right)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}}$$

- En combinant tous les résultats obtenus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=n]) &= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \, \frac{1}{q^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^k \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \, \frac{1}{q^2} \, \frac{\left(q^2\right)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{q^2} \left(\frac{q^2}{q}\right)^{n+1} p^{n+1} \, \frac{1}{(1-q)^{n+1}\,(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{q^2}\, q^{n+1}\, \cancel{p^{n+1}} \, \frac{1}{\cancel{p^{n+1}}\,(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} \;=\; \frac{1}{(1+q^2)} \, \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n-1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=n]) = \frac{1}{(1+q^2)} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}.}$$

□

II. Indépendance de variables aléatoires discrètes

II.1. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

- Les **v.a.r. X et Y sont indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in X(\Omega), \quad \forall y \in Y(\Omega), \\ \qquad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y]) \end{array}}$$

- Autrement dit, les v.a.r. X et Y sont indépendantes si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

Remarque

- Dans les énoncés, on trouvera souvent la question :
« les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? ».
Ainsi énoncée, cette question attend généralement la réponse : `NON`.
- Il s'agit alors de démontrer la négation de la propriété d'indépendance. Or :

$$\begin{array}{rl} & \texttt{NON}(\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in X(\Omega), \exists y \in Y(\Omega), \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \neq \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y]) \end{array}$$

On en déduit la méthodologie suivante.

`MÉTHODO` **Démontrer que deux v.a.r. discrètes ne sont pas indépendantes**

- Pour démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \ \neq \ \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

- Souvent, on essaiera de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = x]) \neq 0, \ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$$

Exemple

1) Reprenons l'expérience aléatoire consistant à tirer 3 boules dans une urne contenant 3 boules blanches, 4 vertes et 5 bleues. Alors :

$$\mathbb{P}([X = 3] \cap [Y = 3]) \ = \ 0 \ \neq \ \underbrace{\mathbb{P}([X = 3])}_{\neq 0} \times \underbrace{\mathbb{P}([Y = 3])}_{\neq 0}$$

Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

2) Si on reprend l'exemple du lancer de pièces avec X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile, alors :

$$\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) \ = \ 0 \ \neq \ \underbrace{\mathbb{P}([X = 2])}_{\neq 0} \times \underbrace{\mathbb{P}([Y = 1])}_{\neq 0}$$

Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

Remarque

Soient X et Y sont deux v.a.r. discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable X est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable Y.
Plus précisément, pour tout $x \in X(\Omega)$, pour tout $y \in Y(\Omega)$:

- $\mathbb{P}\left([X = x] \cap [Y \leqslant y]\right) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y \leqslant y])$,
- $\mathbb{P}\left([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]\right) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \times \mathbb{P}([Y \leqslant y])$,
- $\mathbb{P}\left([X \leqslant x] \cap [Y > y]\right) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \times \mathbb{P}([Y > y])$,
- $\mathbb{P}\left([X > x] \cap [Y < y])\right) = \mathbb{P}([X > x] \times \mathbb{P}([Y < y])$,
- ...

Cela provient essentiellement du fait que :

$$[Y \leqslant y] = \bigcup_{\substack{y_j \in Y(\Omega) \\ y_j \leqslant y}} [Y = y_j]$$

et que $[X = x]$ est indépendant de tout événement $[Y = y_j]$.

Remarque
Il arrive (même si c'est rare!) qu'on ait à démontré que deux v.a.r. X et Y sont indépendantes. Ceci se fait parfois par retour à la définition.
Il s'agit alors de démontrer une propriété quantifiée universellement.

Exemple
On considère l'expérience aléatoire consistant en deux lancers succesifs d'un dé à 6 faces. On note X le résultat du 1^{er} lancer et Y le résultat du $2^{\text{ème}}$.

- $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ est muni de la probabilité uniforme noté $\mathbb{P}$.
- On a : $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$.
- Soit $i \in [\![1,6]\!]$ et soit $j \in [\![1,6]\!]$.
  On a : $\mathbb{P}([X=i]) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}([Y=j]) = \dfrac{1}{6}$.
  Or : $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \dfrac{1}{36}$.
  (il n'y a qu'un lancer dont le résultat du 1^{er} dé vaut i et le $2^{\text{ème}}$ vaut j)
- On a alors, pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, et pour tout $j \in [\![1,6]\!]$:

$$\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{6} = \mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}([Y=j])$$

Théorème 2.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes.

1) *Supposons : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X=x]) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rl} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[X=x]}([Y=y]) \ = \ \mathbb{P}([Y=y]) \end{array}}$$

2) *Supposons : $\forall y \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([Y=y]) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rl} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[Y=y]}([X=x]) \ = \ \mathbb{P}([X=x]) \end{array}}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rl} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) = \mathbb{P}([X=x])\ \mathbb{P}([Y=y]) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \dfrac{\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y])}{\mathbb{P}([X=x])} \ = \ \mathbb{P}([Y=y]) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[X=x]}([Y=y]) \ = \ \mathbb{P}([Y=y]) \end{array}$$

□

Remarque
On retiendra que l'on peut se servir des lois conditionnelles pour démontrer l'indépendance de deux événements. Évidemment, choisir cette caractérisation plutôt que la définition dépend du contexte et de ce qui a déjà été déterminé dans l'exercice.

II.2. Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Définition
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (avec $n \geqslant 2$) des v.a.r. discrètes.

- Les v.a.r. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega), \\ \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i = x_i] \right) \ = \ \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = x_i]) \end{array}}$$

- Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de var aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables (mutuellement) indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \text{les variables } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes}$$

Remarque

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors toute famille de n événements dont chacun est construit à l'aide d'une v.a.r. X_i est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Plus précisément, pour tout $x_1 \in X_1(\Omega)$, $\ldots$, $x_n \in X_n(\Omega)$:

- les événements $[X_1 = x_1], [X_2 \leqslant x_2], \ldots [X_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants,
- les événements $[X_1 \leqslant x_1], [X_2 > x_2], \ldots [X_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants,
- ...

Théorème 3 (Lemme des coalitions)**.**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

Soient $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- *Cas de 2 v.a.r.*

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \ \Rightarrow \ f(X) \text{ et } g(Y) \text{ sont indépendantes}}$$

- *Généralisation à n v.a.r.*

  Soient X_1, $\ldots$, X_n des v.a.r. discrètes.

  Soient $f_1 : X_1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\ldots$, $f_n : X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ des fonctions.

$X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	*$f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes*

$X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	*Toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_{p+1}, \ldots, X_n$ (pour $p \in [\![2, n-1]\!]$)*

Exemple

- Soient $X_1, \ldots, X_5$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :
  - × les v.a.r. X_1, ${X_2}^2$, $2\,X_3$, $\mathrm{e}^{X_4}-1$ et $|X_5|$ sont mutuellement indépendantes.
  - × les v.a.r. $2\,X_1X_3 - X_5$ et ${X_2}^2$ sont indépendantes.
  - × les v.a.r. $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_3, X_4, X_5)$ sont indépendantes.
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes.

  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et X_{n+1} sont indépendantes.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors, en procédant par l'absurde, on démontre que X et Y ne le sont pas non plus.

III. Opérations sur les v.a.r. discrètes

Dans cette section, on étudie des v.a.r. du type $Z = g(X, Y)$ où (X, Y) est un couple de v.a.r. discrètes et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.

III.1. Cas général : loi de $g(X, Y)$

Théorème 4.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

Soit (X, Y) *un couple de v.a.r. discrètes.*

Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.

- Z *est un v.a.r. discrète.*
- *L'ensemble des valeurs prises par* $Z = g(X, Y)$ *est donnée par :*

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subseteq & \{g(x, y) \mid x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega)\} \end{array}$$

- *La loi de* $Z = g(X, Y)$ *est donnée par :*

$$\boxed{\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = z) \ = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = g(x,y)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$$

Démonstration.
Il suffit de remarquer :

$$\forall z \in Z(\Omega),\ [Z = z] \ = \bigcup_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = g(x,y)}} [X = x] \cap [Y = y]$$

et que $([X = x] \cap [Y = y])_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles (car c'est un sce). $\square$

Remarque

- Le théorème précédente stipule que la loi de $g(X, Y)$ est fournie par la loi conjointe de X et de Y.
- Si on sait de plus que X et Y sont indépendantes, les lois de X et de Y suffisent à obtenir la loi de $g(X, Y)$. L'indépendance fournit un cadre simple pour l'étude de la loi de $g(X, Y)$.

III.2. Cas particuliers (opérations classiques)

III.2.a) Loi de la somme de deux v.a.r. discrètes

Théorème 5.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

Soit (X, Y) *un couple de v.a.r. discrètes.*

- $X + Y$ *est une v.a.r. discrète.*
- *La loi de* $X + Y$ *est fournie par, pour tout* $z \in (X + Y)(\Omega)$ *:*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X + Y = z]) & = & \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z - x \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{z - y \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = z - y] \cap [Y = y]) \end{array}}$$

Démonstration.
La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forme un sce.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X + Y = z]) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [X + Y = z]) \\ & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]) \end{array}$$

$\square$

Remarque
Il faudra refaire cette démonstration dans tous les exercices consistant à déterminer la loi d'une somme de deux v.a.r. discrètes.

Exemple
On considère deux v.a.r. X et Y tels que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,4 \rrbracket)$ (par exemple les résultats d'un lancer de dés à six faces et à quatre faces).
Déterminons la loi de $X+Y$.

- $\Omega = \llbracket 1,6 \rrbracket \times \llbracket 1,4 \rrbracket$ est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
- $X(\Omega) = \llbracket 1,6 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 1,4 \rrbracket$
- $(X+Y)(\Omega) = \llbracket 2,10 \rrbracket$.
- Soit $k \in \llbracket 2,10 \rrbracket$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}[X+Y=k] & = & \displaystyle\bigcup_{\substack{i \in \llbracket 1,6 \rrbracket \\ k-i \in \llbracket 1,4 \rrbracket}} [X=i] \cap [Y=k-i] \\ & = & [X=1] \cap [Y=k-1] \\ & & \cup \ [X=2] \cap [Y=k-2] \\ & & \cup \ [X=3] \cap [Y=k-3] \\ & & \cup \ [X=4] \cap [Y=k-4] \\ & & \cup \ [X=5] \cap [Y=k-5] \\ & & \cup \ [X=6] \cap [Y=k-6]\end{array}$$

Chacun des événements apparaissant dans l'union n'est réalisé au plus que par un tirage (attention : si $k-i \neq 0$, $[Y=k-i] = \varnothing$).
On en déduit la loi de $X+Y$.

$k \in (X+Y)(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}([X+Y=k])$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

À RETENIR

- On note que la probabilité $\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=z-x])$ est nulle dès que $z-x$ n'appartient pas à $Y(\Omega)$ puisqu'alors $[Y=z-x] = \varnothing$.
- Ceci a pour conséquence de restreindre les indices de sommation lors du calcul de $\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=z-x])$.

Exercice
Soit X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (avec $p \in]0,1[$).
En utilisant un sce associé à X, montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}([X+Y=n]) \ = \ (n-1)\, p^2\, q^{n-2}$$

Stabilité des lois classiques

Théorème 6.

1) **Stabilité des lois binomiales**

Soit $p \in]0,1[$ et soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- *$X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$*
- *X et Y indépendantes*

$\Rightarrow \quad X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$

2) **Stabilité des lois de Poisson**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$.

- *$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$*
- *X et Y indépendantes*

$\Rightarrow \quad X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Démonstration.

1) Comme $X(\Omega) = [\![0, m]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset [\![0, m+n]\!]$.
La famille $([X = i])_{i \in [\![0,m]\!]}$ est un sce.
Soit $k \in [\![0, m+n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}([X=i] \cap [X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=k-i]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) && \textit{(par indépendance)} \\
= \ & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in [\![0,m]\!]}}^{m} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) \\
& + \cancel{\sum_{\substack{i=0 \\ k-i \notin [\![0,m]\!]}}^{m} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i])} && \textit{(car si } k-i \notin [\![0,m]\!], \\
& && [Y=k-i] = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in [\![0,m]\!]}}^{m} \binom{m}{i} p^i\,(1-p)^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i}\,(1-p)^{n-k+i} \\
= \ & p^k\,(1-p)^{n+m-k} \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in [\![0,m]\!]}}^{m} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \\
= \ & \binom{n+m}{k}\ p^k\,(1-p)^{n+m-k}
\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Vandermonde.
Ainsi, $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n, p)$.

2) • Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

• La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=k-i]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) && \textit{(par indépendance} \\
& && \textit{de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) \\
& + \cancel{\sum_{\substack{i=0 \\ k-i \notin Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i])} && \textit{(car } [Y=k-i] = \varnothing \\
& && \textit{si } k-i \notin Y(\Omega)\textit{)} \\
= \ & \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i])
\end{aligned}$$

• La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{ \begin{array}{l} k-i \in Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ i \in [\![0, +\infty[\![\end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant k-i \\ 0 \leqslant i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i \leqslant k \\ 0 \leqslant i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \ 0 \leqslant i \leqslant k \right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([X+Y=k]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\ \mathrm{e}^{-\mu} && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)\textit{)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mu} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\,\mu^{k-i} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\,\mu^{k-i} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\ \lambda^i\,\mu^{k-i} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{k!}\ (\lambda+\mu)^k && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Finalement : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. □

Exercice

Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes.

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Reconnaître la loi de X sachant $[X+Y=n]$.

Démonstration.

- Les v.a.r. X et Y étant indépendantes, $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

  On en déduit : $\mathbb{P}([X+Y=n]) \ = \ \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!} \neq 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X+Y=n]}([X=k]) &= \frac{\mathbb{P}([X=k] \cap [X+Y=n])}{\mathbb{P}([X+Y=n])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X=k] \cap [Y=n-k])}{\mathbb{P}([X+Y=n])} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X=k])\ \mathbb{P}([Y=n-k])}{\mathbb{P}([X+Y=n])} && \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

× Si $k > n$: alors $[Y=n-k] = \varnothing$. Et donc $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}([X=k]) = 0$.

× Si $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X+Y=n]}([X=k]) &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-\mu}\ \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\ \mathrm{e}^{\lambda+\mu}\frac{n!}{(\lambda+\mu)^n} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{\lambda^k\ \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^k\ (\lambda+\mu)^{n-k}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

On reconnaît la loi binomiale de paramètre $(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$. □

Exercice

Soient $X_1, \dots, X_k$ des v.a.r. mutuellement indépendantes.

Déterminer la loi de $X_1 + \dots + X_k$ lorsque :

(i) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, …, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

(ii) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, …, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.

(iii) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, …, $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$.

III.2.b) Loi du produit de deux v.a.r. discrètes

Théorème 7.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

- *XY est une v.a.r. discrète.*
- *On détermine la loi de XY à l'aide d'une des deux rédactions suivantes.*

1) *La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un sce.*
Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned}\forall z \in (XY)(\Omega),\ \mathbb{P}([XY = z]) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [XY = z]) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [xY = z])\end{aligned}}$$

2) *La famille $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce.*
Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned}\forall z \in (XY)(\Omega),\ \mathbb{P}([XY = z]) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [XY = z]) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [yX = z])\end{aligned}}$$

Le choix de l'introduction du sce $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ ou $([X = x])_{x \in Y(\Omega)}$ est guidé par les lois de X et Y. On optera toujours pour le sce le plus simple.

On illustre ce cas sur un exemple (issu de `EML 2007`).

Exercice

On considère une v.a.r. Y dont la loi est définie par :

× $Y(\Omega) = \mathbb{N}$,

× $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) \ = \ \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \ \mathrm{e}^{-n}$.

1. a) Montrer que la v.a.r. $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

On considère maintenant une v.a.r. U, **indépendante de** Y, dont la loi est définie par :

× $U(\Omega) = \{-1, 1\}$,

× $\mathbb{P}([U = -1]) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([U = 1]) = \dfrac{1}{2}$.

Enfin, on note $T = U \times Y$.

2. Démontrer que T est une v.a.r. discrète dont on déterminera la loi.

Démonstration.

1. a) • $(Y + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y + 1 = n]) &= \mathbb{P}([Y = n - 1]) \\ &= \mathrm{e}^{-(n-1)} \ (1 - \mathrm{e}^{-1}) \\ &= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1} \ \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\end{aligned}$$

Ainsi : $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

b) • La v.a.r. $Y+1$ suit une loi géométrique donc admet une espérance et une variance.

• Or : $Y = (Y+1) - 1$. Donc Y admet donc une espérance et une variance en tant que somme de v.a.r. qui admettent une variance.

• On détermine enfin $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(Y+1) - \mathbb{E}(1) = \mathbb{E}(Y+1) - 1 \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} - 1 = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 1 \\ &= \frac{\mathrm{e} - (\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}-1} \end{aligned}$$

Par propriété de la variance :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{V}(Y+1) = \mathbb{V}(Y) \\ &= \frac{1-(1-\frac{1}{\mathrm{e}})}{(1-\frac{1}{\mathrm{e}})^2} = \frac{\frac{1}{\mathrm{e}}}{(1-\frac{1}{\mathrm{e}})^2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}\,(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}})^2} = \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}\,(\mathrm{e}-1)^2} = \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2} \end{aligned}$$

2. • T est une v.a.r. en tant que produit de deux v.a.r. .

• $T(\Omega) = \mathbb{Z}$. Ainsi, T est une v.a.r. discrète.

• Soit $n \in \mathbb{Z}$. La famille $([U=-1], [U=1])$ forme un sce.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T=n]) &= \mathbb{P}([U=-1] \cap [T=n]) + \mathbb{P}([U=1] \cap [T=n]) \\ &= \mathbb{P}([U=-1] \cap [UY=n]) + \mathbb{P}([U=1] \cap [UY=n]) \\ &= \mathbb{P}([U=-1] \cap [Y=-n]) + \mathbb{P}([U=1] \cap [Y=n]) \\ &= \frac{1}{2} \big(\mathbb{P}([Y=-n]) + \mathbb{P}([Y=n])\big) \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité est vérifiée par indépendance des v.a.r. U et Y.

Trois cas se présentent.

× Si $n = 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T=0]) &= \frac{1}{2} \big(\mathbb{P}([Y=0]) + \mathbb{P}([Y=0])\big) \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\, \cancel{2}\, \mathbb{P}([Y=0]) \\ &= \mathbb{P}([Y=0]) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

× Si $n > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T=n]) &= \frac{1}{2} \big(\cancel{\mathbb{P}([Y=-n])} + \mathbb{P}([Y=n])\big) \\ &= \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-n}\, (1-\mathrm{e}^{-1}) \end{aligned}$$

× Si $n < 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T=n]) &= \frac{1}{2} \big(\mathbb{P}([Y=-n]) + \cancel{\mathbb{P}([Y=n])}\big) \\ &= \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-n}\, (1-\mathrm{e}^{-1}) \end{aligned}$$

□

Exercice
Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes.
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ (avec $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$).
Déterminer la loi de $Z = XY$.

Démonstration.

• Comme $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1\}$ alors : $XY(\Omega) = \{0,1\}$.

• $$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([XY=1]\big) &= \mathbb{P}\big([X=1] \cap [Y=1]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X=1]\big) \times \mathbb{P}\big([Y=1]\big) && \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ &= pq \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } XY \hookrightarrow \mathcal{B}(pq).}$$

□

III.2.c) Loi d'un maximum de deux v.a.r. discrètes

Théorème 8.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes **indépendantes**.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de ces v.a.r.

On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

Remarquons tout d'abord :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ [\max(X,Y) \leqslant t] \ = \ [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ [\min(X,Y) > t] \ = \ [X > t] \cap [Y > t]}$$

1) • *$U = \min(X, Y)$ est une v.a.r. discrète.*

• *La fonction de répartition de $U = \min(X, Y)$ vérifie :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ F_U(t) = 1 - \big(1 - F_X(t)\big) \ \big(1 - F_Y(t)\big)$$

2) • *$V = \max(X, Y)$ est une v.a.r. discrète.*

• *La fonction de répartition de $V = \max(X, Y)$ vérifie :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ F_V(t) = F_X(t) \ F_Y(t)$$

Démonstration.

• Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_V(t) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant t]) & \\ & = & \mathbb{P}([\max(X,Y) \leqslant t]) & \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]) & \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant t]) \ \mathbb{P}([Y \leqslant t]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & F_X(t) \ F_Y(t) & \end{array}$$

• Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_U(t) & = & \mathbb{P}(U \leqslant t) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}(U > t) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > t) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([X > t] \cap [Y > t]) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}\big([X > t]\big) \ \mathbb{P}\big([Y > t]\big) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & 1 - \big(1 - F_X(t)\big) \ \big(1 - F_Y(t)\big) & \end{array}$$

□

Remarque

Une fois connu le maximum de 2 v.a.r. , on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que $X + Y = \min(X,Y) + \max(X,Y)$.

Exercice

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ où p_1 et p_2 sont dans $]0, 1[$.

Notons $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}([X > n])$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([U > n])$.

c) En déduire la loi de U.

2. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}([V \leqslant n])$ puis $\mathbb{P}([V > n])$.

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer : $\sum\limits_{n=1}^{m} n\mathbb{P}([V = n]) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}([V > n]) - m\,\mathbb{P}(V > m)$.

c) En déduire que V admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\mathbb{P}([X > n]) = q_1^n$.

(car $\mathbb{P}([X > n]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant n])$ *et* $[X \leqslant n] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [X = i]$ *...)*

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U > n]) &= \mathbb{P}([X > n] \cap [Y > n]) \\ &= \mathbb{P}([X > n])\, \mathbb{P}([Y > n]) && \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\ &= q_1^n\, q_2^n \ = \ (q_1\, q_2)^n \end{aligned}$$

c) • Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors : $U(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$[U > n-1] \ = \ [U = n] \ \cup \ [U > n]$$

Comme $[U = n]$ et $[U > n]$ sont incompatibles :

$$\mathbb{P}\big([U > n-1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([U = n]\big) \ + \ \mathbb{P}\big([U > n]\big)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U = n]) &= \mathbb{P}\big([U > n-1]\big) - \mathbb{P}\big([U > n]\big) \\ &= (q_1\, q_2)^{n-1} - (q_1\, q_2)^n \ = \ (q_1\, q_2)^{n-1}\ (1 - q_1\, q_2) \end{aligned}$$

On a donc :

× $U(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([U = n]) \ = \ (1 - q_1\, q_2)\ (q_1\, q_2)^{n-1}$.

Comme $q_1\, q_2 \in \,]0, 1[$, on en déduit : $U \hookrightarrow \mathcal{G}\,(q_1\, q_2)$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([V \leqslant n]) &= \mathbb{P}([X \leqslant n] \cap [Y \leqslant n]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant n])\, \mathbb{P}([Y \leqslant n]) && \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\ &= (1 - q_1^n)\ (1 - q_2^n) \ = \ 1 - q_1^n - q_2^n + q_1^n \end{aligned}$$

Et ainsi : $\mathbb{P}([V > n]) = 1 - \mathbb{P}([V \leqslant n] = q_1^n + q_2^n - q_1^n q_2^n$.

b)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{m} n\, \mathbb{P}([V = n]) \\ = \ & \sum_{n=1}^{m} n \Big(\mathbb{P}([V > n-1]) - \ \mathbb{P}([V > n]) \Big) && \text{(d'après la question précédente)} \\ = \ & \sum_{n=1}^{m} n\, \mathbb{P}([V > n-1]) - \sum_{n=1}^{m} n\, \mathbb{P}([V > n]) && \text{(par linéarité)} \\ = \ & \sum_{n=0}^{m-1} (n+1)\ \mathbb{P}([V > n]) - \sum_{n=1}^{m} n\, \mathbb{P}([V > n]) && \text{(par décalage d'indice)} \\ = \ & \sum_{n=0}^{m-1} n\ \mathbb{P}([V > n]) + \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}([V > n]) - \sum_{n=1}^{m} n\ \mathbb{P}([V > n]) \\ = \ & \cancel{\sum_{n=1}^{m-1} n\ \mathbb{P}([V > n])} + \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}([V > n]) - \Big(\cancel{\sum_{n=1}^{m-1} n\ \mathbb{P}([V > n]} + m\ \mathbb{P}([V > m]) \Big) \\ = \ & \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}([V > n]) - m\ \mathbb{P}([V > m]) \end{aligned}$$

c) V admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\ \mathbb{P}([V = n])$ est absolument convergente *i.e.* convergente puisque cette série est à termes positifs.
D'après la question précédente :

$$\sum_{n=1}^{m} n\ \mathbb{P}([V = n]) = \sum_{n=0}^{m-1} q_1^n + \sum_{n=0}^{m-1} q_2^n - \sum_{n=0}^{m-1} (q_1\, q_2)^n - m\mathbb{P}([V > m])$$

× $\sum\limits_{n=0}^{m-1} q_1^n \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1 - q_1} = \dfrac{1}{p_1}$ et $\sum\limits_{n=0}^{m-1} q_2^n \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1 - q_2} = \dfrac{1}{p_2}$

× $\sum\limits_{n=0}^{m-1} (q_1\, q_2)^n \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1 - q_1\, q_2} = \dfrac{1}{p_1 + p_2 - p_1\, p_2}$

× $m\mathbb{P}([V > m]) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit que V admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(V) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1\, p_2}$$

□

IV. Calculs d'espérance

IV.1. Espérance de $Z = g(X,Y)$

Théorème 9 (Théorème de transfert).

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes.

Alors, sous réserve de convergence absolue :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X,Y)) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} g(x,y)\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])\Big) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \Big(\sum_{x\in X(\Omega)} g(x,y)\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])\Big)\end{aligned}}$$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

1) **Si X et Y sont finies**

Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$.
La v.a.r. $g(X,Y)$ admet alors une espérance donnée par :

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])}$$

2) **Si X est finie et Y infinie**

- *Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.*
  Si pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ est absolument convergente alors $g(X,Y)$ admet une espérance et :

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])}$$

- *Le cas X infinie et Y finie est similaire.*
  $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$.
  Si pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la série $\sum\limits_{i\geqslant 0} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ est absolument convergente alors $g(X,Y)$ admet une espérance et :

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])}$$

3) **Si X est infinie et Y infinie**

Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.
Il faut alors démontrer :

a) *pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ est absolument convergente.*

b) *la série $\sum\limits_{i\geqslant 0} \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])\right)$ est absolument convergente.*

Alors $g(X,Y)$ admet une espérance donnée par :

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])}$$

Exercice

Considérons deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i]\cap[Y=j]) = \frac{i+j}{\mathrm{e}\ 2^{i+j}\ i!\ j!}$$

Calculer l'espérance de $Z = 2^{X+Y}$.

Démonstration.
*(il s'agit du cas **3)** précédent)*
Ici, $Z = 2^{X+Y} = g(X,Y)$ pour $g : (x,y) \mapsto 2^{x+y}$.

a) Soit $i \in \mathbb{N}$. On remarque :

$$g(i,j)\ \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \ = \ \cancel{2^{i+j}}\frac{i+j}{\mathrm{e}\ \cancel{2^{i+j}}\ i!\ j!} \ = \ \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$$

La série $\sum\limits_j \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$ est à termes positifs. Démontrer qu'elle est absolument convergente revient donc à démontrer qu'elle est convergente.
Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} \frac{(i+j)}{\mathrm{e}\ i!\, j!} &= \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{i}{\mathrm{e}\ i!}\ \frac{1}{j!} + \frac{1}{\mathrm{e}\ i!}\ \frac{j}{j!} \right) \\ &= \frac{i}{\mathrm{e}\ i!} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} + \frac{1}{\mathrm{e}\ i!} \sum_{j=0}^{N} \frac{j}{j!}\end{aligned}$$

Or $\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ et $\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{j}{j!} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{j}{j!} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{(j-1)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$.
Ainsi la série $\sum\limits_j \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$ est convergente de somme :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!} \ = \ \frac{i}{\cancel{\mathrm{e}}\ i!}\ \cancel{\mathrm{e}} + \frac{1}{\cancel{\mathrm{e}}\ i!}\ \cancel{\mathrm{e}} \ = \ \frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}$$

b) La série $\sum\limits_i \frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}$ étant à termes positifs, démontrer qu'elle est absolument convergente revient donc à démontrer qu'elle est convergente.
Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right) \ = \ \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{i!}$$

Or, comme vu précédemment : $\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{i}{i!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ et $\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$.
Ainsi la série $\sum\limits_i \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right)$ est convergente et on peut alors conclure :

$$\mathbb{E}\left(2^{X+Y}\right) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!} \right) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right) \ = \ 2\ \mathrm{e}$$

□

IV.2. Espérance d'une somme

Théorème 10 (Linéarité de l'espérance)**.**
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. discrètes admettant une espérance.

1) *Alors $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une espérance.*

2) *De plus :*

$$\boxed{\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\Big) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mathbb{E}(X_i)}$$

En particulier, lorsque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = 1$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

Exemple
Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. discrètes, mutuellement indépendantes, telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Notons $X = X_1 + \dots + X_n$. Alors :

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ *(X compte le nombre de succès dans une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p)*
- $\mathbb{E}(X) \ = \ \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) \ = \ \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = n\,p$

IV.3. Espérance d'un produit

IV.3.a) Cas général

Théorème 11.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.
On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.

1) *Alors XY admet une espérance.*

2) *De plus :*

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$$

Exemple
On reprend l'exemple de début de cours mais avec des dés à trois faces.
On note X le minimum des résultats et Y le maximum.
Déterminer la loi de (X, Y) puis calculer $E(XY)$.

Démonstration.
Nous avons déjà déterminé (en début de chapitre) la loi de (X, Y).

- $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
- On peut représenter la loi de (X, Y) sous forme d'un tableau.

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

- X et Y admettent chacune un moment à l'ordre 2 car elles sont finies.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\
&= \sum_{i \in [\![1,3]\!]} \sum_{j \in [\![1,3]\!]} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2 \\ i > j}} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&\quad + \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2 \\ i = j}} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&\quad + \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2 \\ i < j}} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= 0 + \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,3]\!]^2 \\ i = j}} i^2\ \frac{1}{9} + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{3} ij\ \frac{2}{9} \\
&= \frac{1}{9}\ 14 + \frac{1}{9}\ 11 = \frac{36}{9} = 4
\end{aligned}$$

□

Exercice
Calculer $\mathbb{E}(XY)$ en considérant maintenant :

× $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$,

× $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

(autrement dit, on reprend l'exemple précédent avec deux « dés à n faces »)

Théorème 12.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On suppose :
- *X et Y admettent une espérance.*
- *X et Y sont indépendantes.*

Alors XY admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

Remarque

- Ainsi, le calcul de $\mathbb{E}(XY)$ est aisé lorsque X et Y sont indépendantes.

  Reprenons l'exemple précédent.
  On considère maintenant Z_1 et Z_2 les v.a.r. égales respectivement au résultat du 1^er^ dé et du 2^ème^ dé. Ces v.a.r. étant indépendantes, on obtient :
  $$\mathbb{E}(Z_1 Z_2) \ = \ \mathbb{E}(Z_1)\ \mathbb{E}(Z_2) \ = \ 2 \times 2 \ = \ 4$$
  On tombe sur le résultat de $\mathbb{E}(XY)$!
  C'est fort logique. En effet, $X = \min(Z_1, Z_2)$ et $Y = \max(Z_1, Z_2)$. Donc :
  $$XY \ = \ \min(Z_1, Z_2) \times \max(Z_1, Z_2) \ = \ Z_1 Z_2$$
  (cette constatation aurait pu nous éviter les précédents calculs ...)
- Ce théorème peut aussi être utilisé pour montrer que deux v.a.r. discrètes ne sont pas indépendantes. Il suffit de vérifier que $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

  Reprenons une nouvelle fois l'exercice précédent.
  $\mathbb{E}(X) = \dfrac{14}{9}$ et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{22}{9}$ donc $\mathbb{E}(XY) = 4 \neq \dfrac{14 \times 22}{9^2} = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$
  (il est simple d'obtenir la loi de X et celle de Y)
  Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice

Soient X_1, X_2 et X_3 indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in \,]0, 1[$.

Montrer que les v.a.r. $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes.

Démonstration.

- Comme X_1 et X_2 sont indépendantes et admettent une espérance, la v.a.r. $Y_1 = X_1\, X_2$ admet une espérance et :
  $$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1\, X_2) = \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(X_2)$$
- De même, Y_2 admet une espérance et :
  $$\mathbb{E}(Y_2) = \mathbb{E}(X_2\, X_3) = \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(X_3)$$
- Comme $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ${X_2}^2 = X_2$. Et ainsi :
  $$Y_1\, Y_2 = X_1\, X_2\, X_2\, X_3 = X_1\, {X_2}^2\, X_3 = X_1\, X_2\, X_3$$
  Comme X_1, X_2, X_2 sont indépendantes, par le lemme des coalitions les v.a.r. $X_1\, X_2$ et X_3 sont indépendantes. Ces deux v.a.r. admettent une espérance. On en déduit que $Y_1\, Y_2$ admet une espérance et :
  $$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_1\, Y_2) &= \mathbb{E}(X_1\, X_2\, X_3) = \mathbb{E}(X_1\, X_2)\, \mathbb{E}(X_3) \\ &= \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(X_3) \ = \ p^3 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_1)\, \mathbb{E}(Y_2) &= \mathbb{E}(X_1\, X_2)\, \mathbb{E}(X_2\, X_3) \\ &= \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(X_3) \ = \ p^4 \end{aligned}$$
- Or $p^3 = p^4 \ \Leftrightarrow \ p^3\,(p-1) = 0 \ \Leftrightarrow \ p = 0$ `OU` $p = 1$.
  Ainsi, $\mathbb{E}(Y_1\, Y_2) \neq \mathbb{E}(Y_1)\, \mathbb{E}(Y_2)$ et les v.a.r. ne sont pas indépendantes. □

Ce théorème n'énonce pas un équivalence. Autrement dit, il existe des variables aléatoires X et Y :
- × qui ne sont pas indépendantes,
- × qui vérifient $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y)$.

Exemple
On reprend l'exemple issu de `EML 2007`.

- U v.a.r. telle que :
  - $\times$ $U(\Omega) = \{-1, 1\}$.
  - $\times$ $\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{2}$.
- Y v.a.r. telle que :
  - $\times$ $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
  - $\times$ $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\ \mathrm{e}^{-n}$.
- On considère enfin $T = U \times Y$.

a) Les v.a.r. Y et $T = UY$ **ne sont pas indépendantes**. En effet :

$$\mathbb{P}([Y = 0] \cap [UY = 1]) \ = \ \mathbb{P}([U = 0] \cap [0 = 1]) \ = \ 0$$

puisque $[0 = 1] = \varnothing$. Or : $\mathbb{P}([Y = 0]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([UY = 1]) \neq 0$.

b) • $YT = Y\,UY = UY^2$
Or U et Y sont indépendantes.
Donc, d'après le lemme des coalitions, U et Y^2 sont indépendantes. Ces deux v.a.r. admettant une espérance (Y^2 admet une espérance car Y admet une variance - déjà démontré). Ainsi :

$$\mathbb{E}(YT) \ = \ \mathbb{E}(UY^2) \ = \ \mathbb{E}(U)\ \mathbb{E}(Y^2) \ = \ 0 \times \mathbb{E}(Y^2) \ = \ 0$$

• De même : $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(U\,Y) = \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbb{E}(Y) = 0$

Les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes et pourtant :

$$\mathbb{E}(YT) \ = \ 0 \ = \ \mathbb{E}(Y)\ \mathbb{E}(T)$$

V. Calculs de variance et covariance

V.1. Covariance

V.1.a) Définition

Définition
Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.
On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.
La **covariance** de X et Y est définie par :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)}$$

V.1.b) Calcul en pratique

Théorème 13 (Formule de Kœnig-Huygens)**.**
Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.
On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.
Alors : $\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)}$
En particulier, on a :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)}$$

Démonstration.

- Par définition :

$$\begin{array}{cll} & \mathrm{Cov}(X, Y) & \\ = & \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big) & \\ = & \mathbb{E}\big(XY - \mathbb{E}(Y)X - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\big) & \\ = & \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ = & \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) & \end{array}$$

- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))\big) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{V}(X)$ □

Exemple
On reprend l'exemple des v.a.r. Z_1 et Z_2 qui représentent respectivement le résultat de premier dé et du deuxième dé lors du lancer de deux dés à 3 faces.

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) \ = \ \mathbb{E}(Z_1\, Z_2) - \mathbb{E}(Z_1)\, \mathbb{E}(Z_2) \ = \ 4 - 2 \times 2 \ = \ 0$$

(c'est toujours le cas lorsque Z_1 et Z_2 sont indépendantes, puisqu'alors on a : $\mathbb{E}(Z_1 Z_2) = \mathbb{E}(Z_1)\ \mathbb{E}(Z_2)$)

V.1.c) Propriétés de la covariance

Théorème 14 (Propriétés de la covariance)**.**
Soient X, Y, X_i, Y_i des v.a.r. discrètes.
Supposons que ces v.a.r. admettent chacune un moment d'ordre 2.
L'opérateur de covariance vérifie les propriétés suivantes.

1) $\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)}$
(propriété de symétrie)

2) $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2, Y) = \lambda\, \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mu\, \mathrm{Cov}(X_2, Y)}$
(linéarité à gauche)

3) $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(X, \lambda\, Y_1 + \mu\, Y_2) = \lambda\, \mathrm{Cov}(X, Y_1) + \mu\, \mathrm{Cov}(X, Y_2)}$
(linéarité à droite)

4) $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \mathrm{Cov}(X, a) = \mathrm{Cov}(a, X) = 0}$

Démonstration.

1) D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y, X) &= \mathbb{E}(Y X) - \mathbb{E}(Y)\, \mathbb{E}(X) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y) \\ &= \mathrm{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

2) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Comme X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre 2, c'est aussi le cas de $\lambda\, X_1 + \mu\, X_2$. De plus :

$$\begin{aligned} & \mathrm{Cov}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2, Y) \\ = \ & \mathbb{E}((\lambda\, X_1 + \mu\, X_2)\, Y) - \mathbb{E}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2)\, \mathbb{E}(Y) && \textit{(par la formule de Kœnig)} \\ = \ & \mathbb{E}(\lambda\, X_1\, Y + \mu\, X_2\, Y) - (\lambda\, \mathbb{E}(X_1) + \mu\, \mathbb{E}(X_2))\, \mathbb{E}(Y) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ = \ & \lambda\, \mathbb{E}(X_1\, Y) + \mu\, \mathbb{E}(X_2\, Y) - \lambda\, \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(Y) - \mu\, \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(Y) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ = \ & \lambda\, (\mathbb{E}(X_1\, Y) - \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(Y)) + \mu\, (\mathbb{E}(X_2\, Y) - \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(Y)) \\ = \ & \lambda\, \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mu\, \mathrm{Cov}(X_2, Y) && \textit{(par la formule de Kœnig)} \end{aligned}$$

3) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & \mathrm{Cov}(X, \lambda\, Y_1 + \mu\, Y_2) \\ = \ & \mathrm{Cov}(\lambda\, Y_1 + \mu\, Y_2, X) && \textit{(par symétrie)} \\ = \ & \lambda\, \mathrm{Cov}(Y_1, X) + \mu\, \mathrm{Cov}(Y_2, X) && \textit{(par le point 2))} \end{aligned}$$

4) Soit $a \in \mathbb{R}$. $\mathrm{Cov}(X, a) = \mathbb{E}(aX) - \mathbb{E}(a)\, \mathbb{E}(X) = a\, \mathbb{E}(X) - a\, \mathbb{E}(X) = 0$.

□

V.1.d) Une condition nécessaire d'indépendance

Théorème 15.

Soient X et Y deux v.a.r. (discrètes).

On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = 0}$$

Démonstration.
On utilise la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X\,Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

Or, comme les v.a.r. X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \;\; E(Y)$.
On en déduit que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. □

Remarque

- Généralement c'est la contraposée de cet énoncé qui est utilisée. Elle permet de démontrer que deux v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence. Autrement dit, il existe des variables aléatoires X et Y :
× qui ne sont pas indépendantes,
× qui vérifient $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Exemple
On reprend l'exemple issu de `EML 2007`.
On a déjà démontré :
× Y et T $(= UY)$ ne sont pas indépendantes,
× vérifient : $\mathbb{E}(YT) = \mathbb{E}(Y)\ \mathbb{E}(T)$
Ainsi : $\mathrm{Cov}(Y, T) = \mathbb{E}(YT) - \mathbb{E}(Y)\ \mathbb{E}(T) = 0$.

V.2. Variance d'une somme

V.2.a) Cas général

Théorème 16.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.
(i.e. X et Y admettent une variance)

1) Alors $X + Y$ admet une variance.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\ \mathrm{Cov}(X, Y)}$

Démonstration.

1) Comme : $(X + Y)^2 = X^2 + 2\ XY + Y^2$, et que chaque élément de la somme admet une espérance, $X + Y$ admet un moment d'ordre 2.

2) On utilise la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{V}(X+Y) \\ = & \mathbb{E}((X+Y)^2) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\ = & \mathbb{E}\left(X^2 + Y^2 + 2XY\right) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\ = & \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) + 2\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ = & \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) \end{array}$$

□

V.2.b) Variance d'une somme de v.a.r. indépendantes

Théorème 17.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.
(i.e. X et Y admettent une variance)

1) Alors la v.a.r. $X + Y$ admet une variance. De plus :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}$$

2) **Généralisation**

On suppose :
- *$X_1, \dots, X_n$ admettent une variance.*
- *$X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes.*

Alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$$

Démonstration.

1) Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
Donc, d'après le point précédent, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

2) Par récurrence sur n. □

Remarque

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. discrètes, mutuellement indépendantes, telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Notons $X = X_1 + \dots + X_n$. Alors :

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ *(X compte le nombre de succès dans une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p)*
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n) = n\,p\,q$

Exemple

Considérons à nouveau l'exemple du lancer de 2 dés à 3 faces.

- On note Z_1 le résultat du 1^{er} dé et Z_2 le résultat du $2^{\text{ème}}$.
- On note X le maximum des résultats et Y le minimum.

1) Il s'agit de déterminer $\mathbb{V}(X+Y)$.

Afin de s'épargner tout calcul, on remarque :

$$X + Y = \min(Z_1, Z_2) + \max(Z_1, Z_2) = Z_1 + Z_2$$

Comme Z_1 et Z_2 sont indépendantes et admettent une variance :

$$\mathbb{V}(Z_1 + Z_2) = \mathbb{V}(Z_1) + \mathbb{V}(Z_2) = \frac{3^2-1}{12} + \frac{3^2-1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

(si $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ alors $\mathbb{V}(Z_1) = \frac{n^2-1}{12}$)
Ainsi, $X + Y$ admet une variance qui vaut :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(Z_1 + Z_2) = \frac{4}{3}$$

2) Déterminons alors $\text{Cov}(X, Y)$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \\ &= 4 - \frac{14}{9}\,\frac{22}{9} = \frac{4 \times 9^2 - 14 \times 22}{9^2} = \frac{324 - 308}{9^2} = \frac{16}{9^2} \end{aligned}$$

3) Déterminons alors $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$. Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{1^2 \times 5 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 1}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{26}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 \\ &= \frac{9 \times 26}{9^2} - \frac{14^2}{9^2} = \frac{234 - 196}{9^2} = \frac{38}{9^2} \end{aligned}$$

On peut faire de même pour $\mathbb{V}(Y)$ $(= \frac{9 \times 58 - 22^2}{9^2})$ ou remarquer :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - 2\,\text{Cov}(X, Y) = \frac{8}{3} - \frac{38}{9^2} - \frac{32}{9^2} = \frac{38}{9^2}$$

V.3. Coefficient de corrélation linéaire

Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent des variances non nulles.

Le **coefficient de corrélation linéaire de X et de Y** est :

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\ \sigma(Y)}}$$

Théorème 18.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent des variances non nulles.

1) *Inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\boxed{|\ \mathrm{Cov}(X,Y)\ |\ \leqslant\ \sigma(X)\ \sigma(Y)}$$

On en déduit (reformulation) : $\boxed{|\rho(X,Y)| \leqslant 1}$

2) $|\rho(X,Y)|\ =\ 1 \ \Leftrightarrow$ *une des v.a.r. est, presque sûrement, une fonction affine de l'autre*

3) *Plus précisément :*

× $\rho(X,Y) = 1$ *ssi une des v.a.r. est presque sûrement une fonction affine strictement croissante de l'autre v.a.r. .*
Cela signifie qu'il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\mathbb{P}\big(\,[X = a\,Y + b]\,\big) = 1 \qquad \texttt{OU} \qquad \mathbb{P}\big(\,[Y = a\,X + b]\,\big) = 1$$

× $\rho(X,Y) = -1$ *ssi une des v.a.r. est presque sûrement une fonction affine strictement décroissante de l'autre v.a.r. .*
Cela signifie qu'il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\mathbb{P}\big(\,[X = -a\,Y + b]\,\big) = 1 \qquad \texttt{OU} \qquad \mathbb{P}\big(\,[Y = -a\,X + b]\,\big) = 1$$

Remarque

- Les valeurs intermédiaires entre -1 et 1 renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux v.a.r. . Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les v.a.r. est forte.
- Deux v.a.r. dont la covariance est nulle (et donc le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites non corrélées.

Exemple

On reprend l'exemple précédent.

$$\rho(X,Y) \ = \ \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} \ = \ \frac{\frac{16}{9^2}}{\sqrt{\frac{38}{9^2}}\,\sqrt{\frac{38}{9^2}}} \ = \ \frac{16}{\cancel{9^2}}\,\frac{\cancel{9^2}}{38} \ = \ \frac{16}{38} \ = \ \frac{8}{19}$$

Démonstration.

1) • Considérons la fonction $f : t \mapsto \mathbb{V}(t\,X + Y)$.
Remarquons tout d'abord que cette fonction est bien définie. En effet, la v.a.r. $t\,X + Y$ admet une variance en tant que somme de v.a.r. qui admettent une variance.

• Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcll}
f(t) & = & \mathbb{V}(t\,X+Y) \ = \ \mathrm{Cov}(t\,X+Y, t\,X+Y) & \\
& = & \mathrm{Cov}(t\,X, t\,X+Y) + \mathrm{Cov}(Y, t\,X+Y) & \textit{(par linéarité à gauche)} \\
& = & \mathrm{Cov}(t\,X, t\,X) \ + \ \mathrm{Cov}(t\,X, Y) \ + \ \mathrm{Cov}(Y,Y) \ + \ \mathrm{Cov}(Y, t\,X) & \textit{(par linéarité à droite)} \\
& = & t\ \mathrm{Cov}(X, t\,X) \ + \ t\ \mathrm{Cov}(X,Y) \ + \ \mathrm{Cov}(Y,Y) \ + \ t\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \\
& = & t^2\ \mathrm{Cov}(X,X) \ + \ 2t\ \mathrm{Cov}(X,Y) \ + \ \mathrm{Cov}(Y,Y) & \\
& = & \mathbb{V}(X)\ t^2 + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)\ t + \mathbb{V}(Y) &
\end{array}$$

Ainsi, la fonction f est polynomiale de degré 2.
On note P le polynôme de degré 2 associé.

- Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = \mathbb{V}(t\,X + Y) \geqslant 0$.
  Cette fonction polynomiale étant de signe constant, on en déduit que le discriminant de P est de signe négatif. Or :
  $$\Delta \;=\; (2\,\mathrm{Cov}(X,Y))^2 - 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \;=\; 4(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 - 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$
  Et enfin :
  $$\begin{array}{rcll} \Delta \leqslant 0 & \Leftrightarrow & \cancel{4}\,(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 \leqslant \cancel{4}\,\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) & \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{(\mathrm{Cov}(X,Y))^2} \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)} & \textit{(par stricte croissance de } \sqrt{\cdot}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & |\,\mathrm{Cov}(X,Y)\,| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)} & \\ & \Leftrightarrow & |\,\mathrm{Cov}(X,Y)\,| \leqslant \sigma(X)\;\sigma(Y) & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{|\,\mathrm{Cov}(X,Y)\,|}{\sigma(X)\;\sigma(Y)} \leqslant 1 & \\ & \Leftrightarrow & |\,\rho(X,Y)\,| \leqslant 1 & \end{array}$$

2) Déterminons maintenant sous quelle condition a lieu l'égalité de l'énoncé.
$$\begin{array}{cl} & |\rho(X,Y)| = 1 \\ \Leftrightarrow & \big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \\ \Leftrightarrow & \Delta = 0 \\ \Leftrightarrow & \text{Le polynôme } P \text{ admet une unique racine } \alpha \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \exists!\,\alpha \in \mathbb{R},\ P(\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists!\,\alpha \in \mathbb{R},\ \mathbb{V}(\alpha\,X + Y) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists!\,\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha\,X + Y \text{ est constante presque sûrement} \\ \Leftrightarrow & \exists!\,\alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R},\ Y = -\alpha\,X + \beta \text{ presque sûrement} \end{array}$$

$$\boxed{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \quad \Leftrightarrow \quad \text{La v.a.r. } Y \text{ est une transformée affine de } X\text{, presque sûrement}}$$

3) Rappelons que d'après le point précédent :
$$\begin{array}{cl} & \rho(X,Y) \in \{-1,1\} \\ \Leftrightarrow & |\rho(X,Y)| = 1 \\ \Leftrightarrow & \text{Le polynôme } P \text{ admet une unique racine } \alpha \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \exists!\,\alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R},\ Y = -\alpha\,X + \beta \text{ presque sûrement} \end{array}$$

Par la formule des racines des polynômes de second degré, on obtient que l'unique racine α de P s'écrit sous la forme :
$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & \dfrac{-\cancel{2}\,\mathrm{Cov}(X,Y)}{\cancel{2}\,\mathbb{V}(X)} & \\ & = & -\,\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{V}(X)}\;\dfrac{\sigma(X)\,\sigma(Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} & \\ & = & -\,\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}\;\dfrac{\sigma(X)\,\sigma(Y)}{\mathbb{V}(X)} & \\ & = & -\rho(X,Y)\;\dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} & \textit{(car } \mathbb{V}(X) = \big(\sigma(X)\big)^2\textit{)} \end{array}$$

On en déduit finalement, d'après ce qui précède :

$$\boxed{\rho(X,Y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \beta \in \mathbb{R},\ Y = \dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\;X + \beta \text{ presque sûrement}}$$

$$\boxed{\rho(X,Y) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \beta \in \mathbb{R},\ Y = -\dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\;X + \beta \text{ presque sûrement}}$$

$\square$

Exercice `ESSEC II - 2001`

1. **Covariance des v.a.r. X et Y**

a) Exprimer $\text{Cov}(\lambda X+Y, \lambda X+Y)$ en fonction de $\mathbb{V}(\lambda X+Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$\mathbb{V}(\lambda X+Y) = \lambda^2\mathbb{V}(X) + 2\lambda\text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$

b) En déduire : $(\text{Cov}(X,Y))^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité :

$$(\text{Cov}(X,Y))^2 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

2. **Coefficient de corrélation linéaire des v.a.r. X et Y.**

On suppose dans cette question les variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\text{Cov}(X,Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1,+1]$.

Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

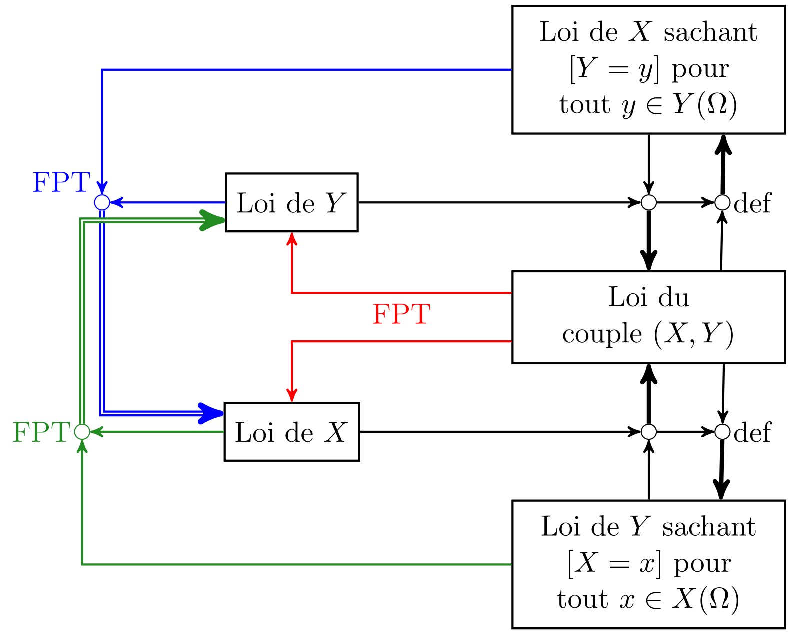
b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Bilan du chapitre : liens entre les différentes lois

Il faut savoir :

- × faire le lien entre la loi de couples et les lois conditionnelles.
- × déterminer les lois marginales si on connaît la loi du couple,
- × déterminer les lois marginales si on connaît les lois conditionnelles.

Les liens en ces différentes notions sont rappelés dans le schéma suivant.



On retiendra que la formule des probabilités totales est la clé pour déterminer les lois marginales. Si la détermination de la loi du couple / les lois conditionnelles constitue généralement la plus grande difficulté d'un exercice sur les couples, la détermination des lois marginales se résume simplement à une application de la formule des probabilités totales. Des difficultés calculatoires peuvent apparaître mais il n'y a aucune difficulté méthodologique.