Feuille d'exercices n°7 : Couples de v.a.r. discrètes

Exercice 3. (★)

a. • On commence par compléter le tableau de sorte à obtenir les lois marginales (ce qui revient à appliquer la formule des probabilités totales).

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	t	0	1	$\mathbb{P}([X=x])$
0	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{8}$	$a+\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{5}$	b	$\frac{1}{10}$	$b+\frac{3}{10}$
$\mathbb{P}([Y=y])$	$\frac{9}{20}$	$a+b$	$\frac{9}{40}$	$a+b+\frac{27}{40}$

On obtient alors une première information : $a+b+\dfrac{54}{80}=1$.

Autrement dit : $a+b=\dfrac{26}{80}=\dfrac{13}{40}$.

• Il reste à exploiter l'indépendance des v.a.r. X et Y.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=y]) = \mathbb{P}([X=0]) \times \mathbb{P}([Y=y]) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{4} = \frac{9}{20}\times\left(a+\frac{3}{8}\right) \\ \Leftrightarrow\ & a = \frac{13}{72} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$b = 1-\frac{54}{80}-a = 1-\frac{54}{80}-\frac{13}{72} = \frac{720-486-130}{720} = \frac{104}{720} = \frac{13}{90}$$

• On remplace alors les valeurs dépendant de a et b dans le tableau :

$$a+\frac{3}{8}=\frac{40}{72}=\frac{5}{9} \quad \text{et} \quad b+\frac{3}{10}=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$$

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	t	0	1	$\mathbb{P}([X=x])$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{72}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{9}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{9}$
$\mathbb{P}([Y=y])$	$\frac{9}{20}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{9}{40}$	1

Par mesure de vérification, on s'assure que $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$ est bien égal au produit $\mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Y=j])$ (c'est le cas).

• Les v.a.r. X et Y étant indépendantes : $\mathbb{P}_{[Y=y]}([X=x])=\mathbb{P}([X=x])$.

b. • On suppose maintenant $a=\dfrac{1}{5}$.

On calcule alors $b=\dfrac{1}{8}$ puis on remplit le tableau avec :

$$a+\frac{3}{8}=\frac{23}{40} \quad \text{et} \quad b+\frac{3}{10}=\frac{17}{40}$$

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	t	0	1	$\mathbb{P}([X=x])$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{23}{40}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{17}{40}$
$\mathbb{P}([Y=y])$	$\frac{9}{20}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{9}{40}$	1

- On en déduit alors par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{17}{40} = \frac{17}{40} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y) = t \times \frac{9}{20} + \frac{9}{40} = \frac{18\,t+9}{40}$$

- Par le théorème de transfert, on obtient :

$$\mathbb{E}(XY) = t \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{10} = \frac{2t+1}{5}$$

- Puis par la formule de Kœnig-Huyghens :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \frac{2t+1}{5} - \frac{17\,(18t+9)}{40^2}$$

- On cherche enfin à trouver t qui annule le cœfficient de corrélation :

$$\begin{array}{rl} & \rho(X,Y) = 0 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{2y+1}{5} - \dfrac{17(18t+9)}{40^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & y = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

c. D'après la question précédente, X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$a = \frac{1}{5} \neq \frac{13}{72}$$

(seule valeur de a permettant d'assurer l'indépendance de X et Y)

Exercice 9. (★)

a. • X est égale au rang d'apparition du premier succès (obtenir 6) dans une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (lancer d'un dé) indépendantes et de même paramètre p $(= \frac{1}{6})$. Ainsi : $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

- Les lancers étant indépendants, la séquence suivant le premier 6 est à considérer comme une nouvelle séquence de lancers. Ainsi : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.
- On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 6 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}} = \frac{36 \times 5}{6} = 30$$

b. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = E(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 12$$

Par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 60$$

c. Comme pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in [\![1, +\infty[\![$ et $Y(\omega) \in [\![1, +\infty[\![$ alors $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Soit $k \geqslant 2$.
$(X = i)_{i \geqslant 1}$ est le sce associé à X.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z=k]) & = & \mathbb{P}([X+Y=k]) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [X+Y=k]) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=k-i]) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k-1} (1-p)^{i-1}\ p\ (1-p)^{k-i-1}\ p + \sum\limits_{i=k}^{+\infty} 0 \\ & = & p^2 \sum\limits_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} \\ & = & p^2\ (1-p)^{k-2}\ (k-1) \ = \ \dfrac{(k-1)\,5^{k-2}}{6^k} \end{array}$$

d. Z représente le rang d'apparition du deuxième 6.
On peut obtenir la loi de Z par dénombrement.

- Soit $k \geqslant 2$. Un tirage réalisant $[Z = k]$ (*i.e.* un tirage dont le deuxième 6 apparaît au $k^{\text{ème}}$ lancer) est un tirage dont les k premiers lancers sont entièrement déterminés par :
  × le choix du rang d'apparition du premier 6 : $k-1$ possibilités.
- De plus chacun de ces cas a la probabilité $(1-p)^{k-2}\ p^2$ d'apparaître puisque ces k premiers lancers comportent $k-2$ lancers différents de 6 et deux lancers qui donnnent 6.
- Avec $p = \frac{1}{6}$, on obtient finalement :

$$\mathbb{P}([Z=k]) \ = \ (k-1)\ (1-p)^{k-2}\ p^2 \ = \ \frac{(k-1)\,5^{k-2}}{6^k}$$

Exercice 16. (★)
Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants.

- B_n : « on tire une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage ».
- N_n : « on tire une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage ».

Ainsi : $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

a. • Le premier tirage s'effectuant dans U_1, on obtient : $p_1 = \dfrac{1}{2}$.

- (B_1, N_1) est un sce. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B_2) & = & \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) \\ & = & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(B_2) \quad \textit{(car } \mathbb{P}(B_1) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}(N_1) \neq 0\textit{)} \\ & = & p_1 \times \dfrac{1}{2} + (1-p_1) \times \dfrac{1}{4} \\ & = & \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8} \end{array}$$

b. On applique la formule des probabilités totales à B_{n+1} sur le système complet d'évènements $(B_n, \overline{B_n})$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B_{n+1}) & = & \mathbb{P}(B_n \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(N_n \cap B_{n+1}) \\ & = & \mathbb{P}(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(N_n) \times P_{N_n}(B_{n+1}) \quad \textit{(car } \mathbb{P}(B_n) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}(N_n) \neq 0\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{2}\ p_n + \dfrac{1}{4}\ (1-p_n) = \dfrac{1}{4}\ p_n + \dfrac{1}{4} \end{array}$$

La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (p_n) est : $x = \dfrac{1}{4}\ x + \dfrac{1}{4}$.
  Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{1}{3}$.
- On écrit :

$$\begin{array}{rcccccl} p_{n+1} & = & \dfrac{1}{4} & \times & p_n & + & \dfrac{1}{4} \quad (L_1) \\ \lambda & = & \dfrac{1}{4} & \times & \lambda & + & \dfrac{1}{4} \quad (L_2) \\ \text{et donc} \quad p_{n+1} - \lambda & = & \dfrac{1}{4} & \times & (p_n - \lambda) & & \quad (L_1)-(L_2) \end{array}$$

  Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = p_n - \lambda$.
- La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcl} v_n & = & \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \times v_1 \ = \ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \times (p_1 - \lambda) \\ & = & \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \times \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) \ = \ \dfrac{1}{6}\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \end{array}$$

  On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n \ = \ v_n + \lambda \ = \ \dfrac{1}{6}\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{3}$.
  Enfin, comme $\dfrac{1}{4} \in\ ]-1,1[$, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$.

c. • $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$.

• $\mathbb{P}([X_n = 1]) = \mathbb{P}(B_n) = p_n$ et $\mathbb{P}([X_n = 0]) = \mathbb{P}(N_n) = 1 - p_n$.

Ainsi, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. D'où :

$$\mathbb{E}(X_n) = p_n \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_n) = p_n\,(1 - p_n) = p_n - p_n^2$$

d. *(Note : il n'y a pas de 0 dans la loi du couple, on essaie les différentes intersections successivement jusqu'à ce qu'une soit fausse ou toutes soient bonnes)*

Les v.a.r. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes car (par exemple) :

$$\mathbb{P}([X_1 = 1])\ \mathbb{P}([X_2 = 1]) = p_1 \times p_2 = \frac{3}{16}$$
$$\text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

e. La v.a.r. X_k est égale au nombre de boule blanche (1 ou 0) obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage. Ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Donc par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \\ &= \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Exercice 18. (★)

1. Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on considère les événements suivants.

× P : « le dé choisit est truqué »,

× A_i : « le $i^{\text{ème}}$ lancer a donné la face 1 ».

On cherche donc à déterminer $\mathbb{P}_{(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}(P)$.

• Par définition et comme $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(P) = \frac{\mathbb{P}(P \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$

• On obtient par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(P \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ = \ & \mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P(A_1) \times \mathbb{P}_{P \cap A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{P \cap A_1 \cap A_2}(A_3) \\ = \ & \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

• Comme $(P, \overline{P})$ est un système complet d'événements, on obtient par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ = \ & \mathbb{P}\left(P \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) + \mathbb{P}\left(\overline{P} \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \\ = \ & \frac{5^3}{2 \times 6^3} + \mathbb{P}(\overline{P})\ \mathbb{P}_{\overline{P}}(A_1)\ \mathbb{P}_{\overline{P} \cap A_1}(A_2)\ \mathbb{P}_{\overline{P} \cap A_1 \cap A_2}(A_3) \\ = \ & \frac{5^3}{2 \times 6^3} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5^3 + 1}{2 \times 6^3} \end{aligned}$$

(la deuxième égalité est encore obtenue par la formule des probabilités composées)

• On en conclut que :

$$\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(P) = \frac{\frac{5^3}{2 \times 6^3}}{\frac{5^3+1}{2 \times 6^3}} = \frac{5^3}{2 \times 6^3} \times \frac{2 \times 6^3}{5^3 + 1} = \frac{5^3}{5^3 + 1} = \frac{125}{126}$$

2. ***a)*** X est égale au rang d'apparition du premier succès (obtenir 1) dans une succession possiblement infinie d'épreuves de Bernoulli (lancer d'un dé) indépendantes et de même paramètre p $(= \frac{1}{6})$.
Ainsi : $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

On en déduit que : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p} = 6$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{\frac{5}{6}}{(\frac{1}{6})^2} = 30$.

b) De même $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{5}{6}\right)$.

On en déduit que : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{6}{5}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{\frac{1}{6}}{(\frac{5}{6})^2} = \dfrac{6}{25}$.

3. $([X = k])_{k \geqslant 1}$ est le sce associé à la v.a.r. X.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = k])$$

Or, comme X et Y sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = Y]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \times \mathbb{P}([Y = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \frac{5}{6} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{36}\right)^{k} = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{36}} \\
&= \frac{5}{36} \times \frac{36}{31} = \frac{5}{31}
\end{aligned}$$

4. $([X = i])_{i \geqslant 1}$ est le sce associé à la v.a.r. X.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X < Y]) &= \mathbb{P}([X - Y < 0]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [X - Y < 0]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y > i]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y > i]) && \textit{(car X et Y sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{i-1} \\
&= \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{36}\right)^{i-1} = \frac{1}{36} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{36}\right)^{i} \\
&= \frac{1}{36} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{36}} = \frac{1}{36} \times \frac{36}{31} = \frac{1}{31}
\end{aligned}$$

5. Z suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $(X+Z)(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$.
- Soit $k \geqslant 2$. $([X=i])_{i\geqslant 1}$ est le sce associé à la v.a.r. X.
  Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([X+Z=k])\\
=\ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i]\cap[X+Z=k])\\
=\ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i]\cap[Z=k-i])\\
=\ & \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}([X=i]\cap[Z=k-i]) && \textit{((*) car } [Z=k-i]=\varnothing \textit{ si } i\geqslant k)\\
=\ & \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Z=k-i]) && \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Z)\\
=\ & \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-i-1}\frac{1}{6}\\
=\ & \frac{1}{6^2}\sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{(k-1)5^{k-2}}{6^k}
\end{aligned}$$

(*) On cherche à déterminer les i tels que :

$$i \in [\![1,+\infty[\![\ \texttt{ET} \ \ k-i \in [\![1,+\infty[\![$$

Or : $\quad k-i \in [\![1,+\infty[\![\quad\Leftrightarrow\quad k-i\geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad i\leqslant k-1$

Enfin : $\quad [\![1,+\infty[\![\,\cap\,]\!]-\infty,k-1]\!] = [\![1,k-1]\!]$.

Remarque
De manière générale :

$$\boxed{(a\leqslant i\leqslant b \ \text{ et } \ c\leqslant i\leqslant d) \quad\Leftrightarrow\quad \max(a,c)\leqslant i\leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)