CH XVI : Calcul différentiel pour les fonctions de plusieurs variables

Introduction

- Le but de ce chapitre est de généraliser les notions relatives à la dérivation (définitions et propriétés calculatoires, extrema, équations différentielles), connues pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, au cas des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire des fonctions de p variables réelles et à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique. Plus précisément :
  - × on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire défini par :

$$\forall \overline{x} = (x_1, \dots, x_p),\ \forall \overline{y} = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p,\ \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle \ = \ \sum_{k=1}^{p} x_k \times y_k$$

  - × on obtient ainsi la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$:

$$\forall \overline{x} = (x_1, \dots, x_p),\ \|\overline{x}\|_2 \ = \ \sqrt{\sum_{k=1}^{p} {x_k}^2}$$

  (on note dans la suite $\overline{x}$ un élément de $\mathbb{R}^p$)

  - × ainsi que la distance d définie par :

$$\forall \overline{x} = (x_1, \dots, x_p),\ \forall \overline{y} = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p,$$

$$\mathrm{d}(\overline{x}, \overline{y}) \ = \ \|\overline{x} - \overline{y}\|_2 \ = \ \sqrt{\sum_{k=1}^{p} \big(x_k - y_k\big)^2}$$

- On rappelle qu'une partie $U \subset \mathbb{R}^p$ est ouverte si tout élément de U est un point intérieur à U. Autrement dit, U est un ouvert de U si :

$$\forall \overline{x} \in U,\ \exists r > 0,\ B(\overline{x}, r) \ \subset \ U$$

I. Calcul différentiel des fonctions de p variables réelles à variables réelles

I.1. Dérivées partielles d'ordre 1

I.1.a) Applications partielles

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur $D \subset \mathbb{R}^p$.

Soit $\overline{a} = (a_1, \dots, a_p) \in D$.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note :

$$D_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) \in D\}$$

- On appelle **applications partielles** de f en le point $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ les fonctions d'**une** variable réelle à valeurs réelles, obtenues à partir de f en fixant l'une des p variables.
- Plus précisément, f admet p applications partielles en $(a_1, \dots, a_p)$, définies par :

$$f(\cdot, a_2, \dots, a_p) \ = \ \boxed{\begin{array}{rccl} f_1 : & t & \mapsto & f(a_1, \dots, a_{p-1}, t) \\ & D_1 & \to & \mathbb{R} \end{array}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, \cdot, a_{i+1}, \dots, a_p) \ = \ \boxed{\begin{array}{rccl} f_i : & t & \mapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) \\ & D_i & \to & \mathbb{R} \end{array}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f(a_1, \dots, a_{p-1}, \cdot) \ = \ \boxed{\begin{array}{rccl} f_p : & t & \mapsto & f(a_1, \dots, a_{p-1}, t) \\ & D_p & \to & \mathbb{R} \end{array}}$$

Remarque

- Généralement, une fonction f est définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$.
  Cela assure que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la fonction f_i est définie au voisinage de a_i c'est-à-dire dans une boule ouverte de centre a_i.
- En effet, si U est un ouvert, comme $\overline{a} \in U$, il existe $r > 0$ tel que :

$$B(\overline{a}, r) \subset U$$

  Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Démontrons que f_i est définie (au moins) sur $B(a_i, r) \subset \mathbb{R}$.
  Il s'agit de démontrer :

$$\forall t \in B(a_i, r),\ \text{la quantité } f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) \text{ est bien définie}$$

  Pour ce faire, il suffit de démontrer :

$$\forall t \in B(a_i, r),\ (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) \in B(\overline{a}, r) \subset U$$

  Soit $t \in B(a_i, r)$. Alors :

$$\mathrm{d}\Big(\overline{a}, (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)\Big) = \sqrt{|a_i - t|^2} = |a_i - t| < r$$

- Il est important de comprendre que les applications partielles sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est un point essentiel pour la définition des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.

I.2. Notion de dérivée partielle d'ordre 1

I.2.a) Dérivée partielle et gradient en un point

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.

Soit $\overline{a} = (a_1, \dots, a_p) \in U$.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

- Lorsque, la $i^{\text{ème}}$ application partielle de f au point $\overline{a}$ est dérivable en a_i, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la** $i^{\text{ème}}$ **variable en** $\overline{a} = (a_1, \dots, a_p)$. On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})$ cette dérivée.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) \quad \Big(\text{ou encore } \partial_i(\overline{a})\Big) \\ = & \lim_{t \to a_i} \frac{f_i(t) - f_i(a_i)}{t - a_i} \\ = & \lim_{t \to a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p)}{t - a_i} \\ = & \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p)}{h} \end{aligned}$$

- On pourra retenir, en cas d'existence :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) = \lim_{t \to a_i} \frac{f_i(t) - f_i(a_i)}{t - a_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(a_i + h) - f_i(a_i)}{h} = f_i'(a_i)}$$

- Si la fonction f admet des dérivées partielles au point $\overline{a}$ selon chacune de ses variables, on appelle gradient de f au point $\overline{a}$ et on note $\nabla f(\overline{a})$ le vecteur de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\nabla f(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{a}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

Exercice

On considère la fonction $f : (x, y, z) \mapsto 2\, x\, z + x^2\, y - z$.

1. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2, -1)$.

2. Déterminer $\nabla f(1, 2, -1)$.

I.2.b) Applications dérivées partielles et application gradient

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.

Soit $\overline{a} = (a_1, \dots, a_p) \in U$.

Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

- On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable sur U si f admet une dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable en tout point de U.
- La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable $i^{\text{ème}}$ variable est une fonction réelle à p variables réelles, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} & : & (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p) \\ & & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \end{array}}$$

- Lorsque f admet une dérivée partielle par rapport à chacune de ses variables sur U, on appelle gradient de f et on note ∇f la fonction suivante.

$$\begin{array}{cccc} \nabla(f) \ : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^p \\ & (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_p) \ , \dots , \ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, \dots, x_p) \right) \end{array}$$

Exercice

On considère la fonction $f : (x, y, z) \mapsto 2\ x\, z + x^2\, y - z$.

Déterminer ∇f.

Remarque

- Il faut faire attention à la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_p)$.

  La variable x_1 présente au dénominateur est utilisée pour signifier que l'on dérive par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable. On évalue alors cette fonction dérivée partielle au point $(x_1, \dots, x_p)$.

  Ainsi, dans la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_p)$:

  × la variable x_1 apparaissant au déniminateur est liée.

  × les variables x_1 apparaissant comme premier coefficient du point $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

  Ces deux notations jouent donc des rôles fondamentalement différents.
- La notion de dérivée partielle est définie à l'aide de la dérivée d'une fonction réelle à 1 variable réelle. L'ensemble des résultats du chapitre de dérivation des fonctions réelles d'une variable réelle peut donc être utilisé sur les applications partielles.
- Par exemple, si f et g admettent une dérivée partielle selon la $1^{\text{ère}}$ variable sur U alors $f + g$ et $f \times g$ aussi.
- Les dérivées partielles étant des fonctions réelles à p variables réelles, elles peuvent elles aussi admettre des dérivées partielles (on y reviendra plus loin).

I.2.c) Dérivée en un point selon un vecteur

Un questionnement graphique pour comprendre les notions

- Représenter le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sur un intervalle I ($\subset \mathbb{R}$), c'est tracer l'ensemble des points de l'ensemble :
$$\{(x, y) \mid x \in I \quad \text{et} \quad y = f(x)\} = \{\big(x, f(x)\big) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$$
Ces point peuvent être tracés dans le plan. On obtient alors une courbe. Pour tracer le graphe d'une telle fonction, on se sert généralement de la tangente au graphe en un point x_0. C'est une droite sur laquelle le graphe « s'appuie » (rappelons que le mot tangente provient du latin *tangere* qui siginife : toucher). Cette droite représente la meilleur approximation affine du graphe en x_0. Généralement, on représente graphe et tangente comme confondus à proximité de x_0 (même si le seul point commun est souvent $(x_0, f(x_0))$). Le coefficient directeur de la tangente au graphe en x_0 n'est autre que $f'(x_0)$, dérivée de f en x_0. Cette dérivée mesure l'ampleur de la variation de $f(x)$ lorsque x varie à proximité de x_0.
Si on réfléchit à l'élément x_0 comme à un vecteur de la droite vectorielle $\text{Vect}\left(\overrightarrow{i}\right)$ qui définit l'axe des abscisses alors mesurer l'ampleur de la variation de f à proximité de x_0 est réalisé en évaluant f en les points :
$$x_0 + h \cdot \overrightarrow{i} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{où } h \text{ est une « petite} \\ \text{valeur » réelle}\end{array}\right)$$
Le nombre dérivée $f'(x_0)$ peut alors être défini comme la dérivée suivant la direction $\overrightarrow{i}$.
$$f'(x_0) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
- Représenter le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, c'est tracer l'ensemble des points de l'ensemble :
$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in U \quad \text{et} \quad z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$
La représentation graphique associée est une surface (on gagne une dimension par rapport à la notion de courbe). En tout point (x_0, y_0) on peut alors définir un plan tangent (on gagne ici aussi une dimension : droite tangente $\to$ plan tangent) à cette surface. Là encore, on a pour objectif de mesurer l'ampleur des variations des valeurs prises par f lorsque l'on se situe à proximité de (x_0, y_0). Il s'agit alors d'évaluer la valeur de f en les points :
$$(x_0, y_0) + h \cdot \overrightarrow{i} + k \cdot \overrightarrow{j} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{où } h \text{ et } k \text{ sont des} \\ \text{« petites valeurs » réelles}\end{array}\right)$$
Autrement dit : $(x_0, y_0) + h \cdot (1, 0) + k \cdot (0, 1) = (x_0 + h, y_0 + k)$.
Remarquons alors que :
  - × lorsque $k = 0$, on évalue les variations de f selon la direction $\overrightarrow{i}$.
  On retrouve la définition de dérivée partielle suivant la $1^{\text{ère}}$ variable.
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
  - × lorsque $h = 0$, on évalue les variations de f selon la direction $\overrightarrow{j}$.
  On retrouve la définition de dérivée partielle suivant la $1^{\text{ère}}$ variable.
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad = \quad \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$
  - × dans tous les autres cas, on évalue les variations suivant un vecteur v qui est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Les points à proximité de (x_0, y_0) s'écriront alors plutôt sous la forme : $(x_0, y_0) + h \cdot (u \cdot \overrightarrow{i} + v \cdot \overrightarrow{j})$, ce qui permet de définir la dérivée dans la direction $u \cdot \overrightarrow{i} + v \cdot \overrightarrow{j}$.
  $$\mathrm{D}_{u \cdot \overrightarrow{i} + v \cdot \overrightarrow{j}} f(x_0, y_0) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\ u, y_0 + h\ v) - f(x_0, y_0)}{h}$$

On peut ainsi définir des dérivées dans une infinité de directions.

I.2.d) Dérivée en un point selon un vecteur

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.

Soit $\overline{a} = (a_1, \dots, a_p) \in U$.

Soit $\overline{v} = (v_1, \dots, v_p) \in U$ un vecteur non nul (souvent choisi unitaire).

Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & h & \mapsto & f\left(\overline{a} + h \cdot \overline{v}\right) \\ & & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

- Lorsque la fonction φ est dérivable en 0, le nombre dérivée $\varphi'(0)$ est appelé dérivée de la fonction f en $\overline{a}$ dans la direction $\overline{v}$ et est noté $\mathrm{D}_{\overline{v}} f(\overline{a})$.

$$\mathrm{D}_{\overline{v}} f(\overline{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h\, v_1, \dots, a_p + h\, v_p) - f(a_1, \dots, a_p)}{h}$$

- En particulier, lorsque $\overline{v} = e_i$ (pour $i \in [\![1, p]\!]$), on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathrm{D}_{e_i} f(\overline{a}) \\ = \ & \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p)}{h} \\ = \ & \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, p]\!], \ \mathrm{D}_{e_i} f(\overline{a}) \ = \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})}$$

I.3. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur une partie U de $\mathbb{R}^p$

I.3.a) Définition

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.

- On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^1$ sur U si :
  - × elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chacune des variables sur U,
  - × et que ces dérivées partielles sont toutes continues sur U.

Théorème 1.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U	$\Rightarrow$	*La fonction f est continue sur U*

Démonstration. (*à lire après le théorème d'existence du développement limité pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$*)

- Ce résultat est placé ici car il paraît assez naturel de signaler, dès la définition du caractère $\mathscr{C}^1$ que celui-ci entraîne la continuité.
- Cependant, la démonstration usuelle utilise le développement limité à l'ordre 1 des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\overline{a} \in U$. Pour $\overline{h}$ au voisinage de $\overline{0}$:

$$f\left(\overline{a} + \overline{h}\right) - f\left(\overline{a}\right) \ = \ \ell\left(\overline{h}\right) + \|h\|_2 \times \varepsilon\left(\overline{h}\right)$$

Or :

× $\ell\left(\overline{h}\right) \underset{\overline{h} \to \overline{0}}{\longrightarrow} 0$ car ℓ est continue en tant qu'application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie.

× $\|h\|_2 \times \varepsilon\left(\overline{h}\right) \underset{\overline{h} \to \overline{0}}{\longrightarrow} 0$ par continuité des applications $\|\cdot\|_2$ et ε.

On en déduit : $f\left(\overline{a} + \overline{h}\right) \underset{\overline{h} \to \overline{0}}{\longrightarrow} f\left(\overline{a}\right)$ et donc f est continue en $\overline{a}$. □

I.3.b) Le cas des fonctions polynomiales

Définition

- Une fonction de p variables est dite **polynomiale en p indéterminées** si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1^{m_1} \dots x_p^{m_p}, \quad \text{avec } (m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{N}^p$$

(monôme en p indéterminées)

- Soit $i \in [\![1, p]\!]$.
  La fonction $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_i$ est appelée $i^{\text{ème}}$ **fonction coordonnée**.
  Les fonctions coordonnées sont polynomiales en p indéterminées.

Exemple

- La fonction $(x, y) \mapsto 3x^2y^2 + 2xy^3$ est polynomiale.
- La fonction $(x, y) \mapsto 4 + 2y^2 - 5xy^3$ est polynomiale.
- La fonction $(x, y) \mapsto 2x - 1$ est polynomiale.
- La fonction $g_1 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale.
- La fonction $g_2 : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est polynomiale.
- La fonction $g_3 : (x, y) \mapsto 1 - x^2$ est polynomiale.
- La fonction $g_4 : (x, y) \mapsto xy$ est polynomiale.

Théorème 2.
Toute fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ qui est polynomiale en les coefficients $x_1, \dots, x_p$ des p-uplets $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

I.3.c) Stabilité du caractère $\mathscr{C}^1$ par opérations algébriques

Théorème 3.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur U.

1)
- *f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*
- *f_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*

$\Rightarrow$ *Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*

2)
- *f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*
- *f_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*

$\Rightarrow$ *La fonction $f_1 \times f_2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*

3)
- *f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*
- *f_2*
  - × *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*
  - × `NE S'ANNULE PAS` *sur U*

$\Rightarrow$ *La fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*

Remarque

- On retiendra que :
  - × la combinaison linéaire,
  - × le produit,
  - × le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas !),

  de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- Les formules d'obtention des dérivées partielles d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient sont obtenues par les formules de dérivations usuelles.

I.3.d) Stabilité du caractère $\mathscr{C}^1$ par composition

Théorème 4.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit I un intervalle réel.

Soit $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Notons $f = \psi \circ g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U en tant que composée $f = \psi \circ g$ où :

$\times$ *g est :*

- *de classe $\mathscr{C}^1$ sur U,*
- *telle que : $g(U) \subset I$.*

$\times$ *ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

Exemple

Soit f la fonction définie sur $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par :

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + y\ \mathrm{e}^z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :

$$f(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

I.4. Développement limité à l'ordre 1

I.4.a) Définition

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.

Soit $\overline{a} = (a_1, \dots, a_p) \in U$.

Soit $\overline{h} = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$.

- On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en $\overline{a}$ s'il existe :

  $\times$ une forme linéaire $\ell : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

  $\times$ une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $\left\{\begin{array}{l}\times \text{ définie au voisinage de } (0, \dots, 0), \\ \times \text{ de limite nulle en } (0, \dots, 0),\end{array}\right.$

  tels que, pour tout $\overline{h} \in \mathbb{R}^p$ $\left\{\begin{array}{l}\times \text{ dans un voisinage de } (0, \dots, 0), \\ \times \text{ tels que } \overline{a} + \overline{h} = (a_1 + h_1, \dots, a_p + h_p) \in U,\end{array}\right.$

  on a :

$$\boxed{f\left(\overline{a} + \overline{h}\right) = f\left(\overline{a}\right) + \ell\left(\overline{h}\right) + \|h\|_2 \times \varepsilon\left(\overline{h}\right)} \qquad (*)$$

- En réalité, si f admet un développement limité alors celui-ci est unique. Il est alors donné par le théorème qui suit.

Remarque

- Dans le cas $p = 1$

  Le développement limité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)\big)$$

  Cette formule peut aussi s'écrire, pour $h \in \mathbb{R}$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \times h + h\ \varepsilon(h)$$

  où ε est une fonction définie dans un voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\ell : h \mapsto f'(x_0) \times h$ est bien une forme linéaire.

- Dans le cas $p = 2$
  Le développement limité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est défini pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) \\ = \quad & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, y_0) \times h + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, y_0) \times k + \sqrt{h^2 + k^2} \times \varepsilon(h, k) \end{aligned}$$

  où ε est définie au voisinage de $(0, 0)$ et telle que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon\big(h, k\big) = 0$ et $\ell : (h, k) \mapsto \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k)\rangle$ est bien une forme linéaire.

I.4.b) Unicité du développement limité

Théorème 5 (*formule de Taylor-Young*).

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.
Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.
Soit $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_p) \in U$.
Soit $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U	$\Rightarrow$	*La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point $\overline{a} \in U$*

Si c'est le cas, il existe $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} \times \ \textit{définie au voisinage de } (0, \ldots, 0), \\ \times \ \textit{de limite nulle en } (0, \ldots, 0), \end{array} \right.$

tels que, pour tout $\overline{h} \in \mathbb{R}^p \left\{ \begin{array}{l} \times \ \textit{dans un voisinage de } (0, \ldots, 0), \\ \times \ \textit{tels que } \overline{a} + \overline{h} = (a_1 + h_1, \ldots, a_p + h_p) \in U, \end{array} \right.$

on a :

$$\boxed{f\Big(\overline{a} + \overline{h}\Big) \ = \ f\big(\overline{a}\big) \ + \ \langle \nabla f\big(\overline{a}\big), \overline{h}\rangle \ + \ \big\|\overline{h}\big\|_2 \times \varepsilon\Big(\overline{h}\Big)}$$

Remarque

- Un développement limité au voisinage de $\overline{a}$ permet de déterminer le comportement de la fonction f au voisinage de ce point. Dans l'écriture précédente, on se situe à proximité de $\overline{a}$ en ajoutant à $\overline{a}$ une quantité $\overline{h}$ que l'on fait tendre vers 0. Il est aussi possible de se placer directement en un point $\overline{u}$ proche de $\overline{a}$. Pour écrire la formule correspondante, il suffit de poser le changement de variable :

$$\overline{u} = \overline{a} + \overline{h} \to \overline{a} \quad \text{lorsque} \quad \overline{h} \to (0, \ldots, 0)$$

  On obtient alors :

$$f\Big(\overline{u}\Big) \ = \ f\big(\overline{a}\big) \ + \ \langle \nabla f\big(\overline{a}\big), \overline{u} - \overline{a}\rangle \ + \ \|\overline{u} - \overline{a}\|_2 \times \varepsilon\Big(\overline{u}\Big)$$

  où $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} \times \ \text{définie au voisinage de } \overline{a}, \\ \times \ \text{de limite nulle en } \overline{a}. \end{array} \right.$

- Explicitons la formule précédente :

$$\begin{aligned} & \langle \nabla f\big(\overline{a}\big), \overline{u} - \overline{a}\rangle \\ = \quad & \left\langle \left(\ \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\overline{a}\right) \ , \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_p}\left(\overline{a}\right) \ \right) \ , \ (u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) \ \right\rangle \\ = \quad & \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overline{a}\right) \times (u_i - a_i) \end{aligned}$$

- On dit que la fonction f est différentiable en $\overline{a}$ s'il existe une application linéaire ℓ telle que la propriété $(*)$ (de la définition ***I.4.a)*** est vérifiée). Dans ce cas, l'application ℓ est appelée différentielle de f en $\overline{a}$. Le théorème précédent permet d'expliciter la différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

I.4.c) Différentielle

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.

Soit $\overline{a} = (a_1, \dots, a_p) \in U$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U	$\Rightarrow$	La fonction f admet une différentielle de f en $\overline{a} \in U$

- On appelle différentielle de f en $\overline{a}$ la forme linéaire $\mathrm{d}f(\overline{a}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}f(\overline{a}) & : & \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \\ & & \overline{h} \mapsto \langle \nabla f(\overline{a}), \overline{h} \rangle = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a}) \times h_i \end{array}$$

- On notera $\mathrm{d}f(\overline{a}) \cdot \overline{h}$ en lieu et place de $\mathrm{d}f(\overline{a})\left(\overline{h}\right)$ $(= \langle \nabla f(\overline{a}), \overline{h} \rangle)$.

Exercice

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.
Déterminer la différentielle de f.

2. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction constante sur un ouvert U.
Déterminer la différentielle de f.

3. Déterminer la différentielle de $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^3 + 2\ xy$ en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

4. Déterminer la différentielle de $f : \overline{x} \mapsto \| \overline{x} \|_2^2$.

Remarque

- La différentielle d'une fonction en un point renseigne sur le comportement local de f. Plus précisément, la différentielle de f en un point M représente la variation infinitésimale de la fonction f en ce point, c'est-à-dire la variation de f lors d'une variation infinitésimale à proximité de M.
- Pour comprendre cette affirmation, considérons le cas $p = 2$. On note $M(x_0, y_0)$ un point de U. On cherche à connaître le comportement de f au voisinage de ce point. Pour ce faire, on considère un point $M'(x_0+h, y_0+k)$. On varie ainsi de manière infinitésimale autout du point M (pour peu que h et k soient infiniment petits). On note $\mathrm{d}M$ cette variation infinitésimale autour de M ($\mathrm{d}M$ est le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ pour M' infiniment proche de M.

  Le $\mathrm{DL}_1(f)$ permet alors d'affirmer, qu'asymptotiquement parlant :

$$\mathrm{d}f(M) = \big\langle \nabla f\big(M\big), \mathrm{d}M \big\rangle = \underbrace{f\big(M'\big) - f\big(M\big)}_{\text{variation infinitésimale de } f \text{ en } M}$$

- Le vecteur gradient est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f. Pour s'en convaincre, considérons que M se déplace en M' tel que $f(M') \geqslant f(M)$ (déplacement dans le sens des valeurs croissantes de f). On a alors :

$$\big\langle \nabla f\big(M\big), \mathrm{d}M \big\rangle \geqslant 0$$

  (l'angle formé par les vecteurs gradient et déplacement est un angle aigu)

  En particulier, la variation de f sera maximale lorsque ce produit scalaire est maximal c'est-à-dire lorsque le vecteur déplacement est colinéaire au vecteur gradient.
- Imaginons enfin que le point M se déplace le long d'une courbe sur laquelle la fonction f est constante. On aura alors, pour tout M' sur cette courbe : $f(M') = f(M)$. Cela démontre que le long d'une courbe de niveau :

$$\big\langle \nabla f\big(M\big), \mathrm{d}M \big\rangle = 0$$

  (le vecteur gradient est orthogonal à un vecteur déplacement effectué selon les valeurs constantes de f)

I.5. Règle de la chaîne

I.5.a) Énoncé dans le cas où les variables sont des fonctions d'une variable

Théorème 6.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Soient φ_1, …, φ_p des fonctions réelles d'une variable réelle ($\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

On suppose que :

× *pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la fonction φ_i est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.*

× *pour tout $t \in I$, $\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)\big) \in U$.*

On note enfin :

$$\psi \ : \ \begin{array}{ccc} t & \mapsto & f\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)\big) \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

1. La fonction g est dérivable sur I.

2. De plus : $\boxed{\forall t \in I, \ \psi'(t) \ = \ \sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)\Big) \times \varphi_i'(t)}$

Exercice

On considère les fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \ln(1 + x + y^2) - xy \, \mathrm{e}^x \qquad \varphi_1 : t \mapsto t^2 \qquad \varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t$$

On note enfin : $\psi : t \mapsto f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$.

1. Démontrer que ψ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée à l'aide de la règle de la chaîne.

2. Déterminer la dérivée de ψ à l'aide d'un calcul direct.

I.5.b) Généralisation dans le cas où les variables sont des fonctions de plusieurs variables

Théorème 7.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Soient g_1, …, g_p des fonctions réelles de n variables réelles ($\forall i \in [\![1,p]\!]$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

On suppose que :

× *pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la fonction g_i est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$.*

× *pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in V$, $\big(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_p(x_1, \dots, x_n)\big) \in U$.*

On note enfin :

$$h \ : \ \begin{array}{ccc} (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f\big(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_p(x_1, \dots, x_n)\big) \\ \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

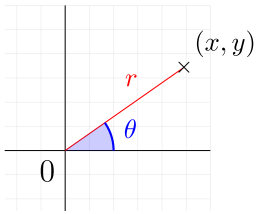
1. La fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

2. De plus : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\forall \overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{\dfrac{\partial h}{\partial x_j}(\overline{x}) \ = \ \sum_{k=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\Big(g_1(\overline{x}), \dots, g_p(\overline{x})\Big) \times \dfrac{\partial g_k}{\partial x_j}(\overline{x})}$$

Remarque

- Le programme officiel stipule comme application classique de cette formule, l'écriture en fonction des coordonnées polaires.



Il s'agit d'opérer la paramétrisation suivante :

$$x = r\,\cos(\theta) \qquad y = r\,\sin(\theta)$$

Étant donnée une fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$, l'effet de cette paramétrisation est de considérer la fonction :

$$h : (r,\theta) \mapsto f\big(r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta)\big)$$

Autrement dit, on considère que les variables sont des fonctions :
$g_1 : (r,\theta) \mapsto r\,\cos(\theta)$ et $g_1 : (r,\theta) \mapsto r\,\sin(\theta)$.
En appliquant la règle de la chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(g_1(r,\theta), g_2(r,\theta)\Big) \times \frac{\partial g_1}{\partial r}(r,\theta) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(g_1(r,\theta), g_2(r,\theta)\Big) \times \frac{\partial g_2}{\partial r}(r,\theta) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta)\Big) \times \cos(\theta) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta)\Big) \times \sin(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(g_1(r,\theta), g_2(r,\theta)\Big) \times \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(r,\theta) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(g_1(r,\theta), g_2(r,\theta)\Big) \times \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(r,\theta) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta)\Big) \times \big(-r\,\sin(\theta)\big) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta)\Big) \times \big(r\,\cos(\theta)\big)
\end{aligned}$$

- Étant donné le lien entre les variables (x,y) et (r,θ), on trouve alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \frac{1}{r}\left(x\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \\
\text{et} \quad & \frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) = x\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)
\end{aligned}$$

Exemple
On considère la fonction :

$$f \;:\; (x,y) \;\mapsto\; \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, avec pour dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

On considère maintenant la fonction h définie pour $(r,\theta) \in V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$h(r,\theta) = f\big(r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta)\big)$$

D'après la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) \times \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) \times \sin(\theta)$$

- $$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\Big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) &= \frac{-2r^2\,\cos(\theta)\sin(\theta)}{\Big(\big(r\,\cos(\theta)\big)^2 + \big(r\,\sin(\theta)\big)^2\Big)^2} \\
&= \frac{-2r^2\,\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^4\,\Big(\big(\cos(\theta)\big)^2 + \big(\sin(\theta)\big)^2\Big)^2} \\
&= \frac{-2\,\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2}
\end{aligned}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}\Big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) = \frac{\big(r\ \cos(\theta)\big)^2 - \big(r\ \sin(\theta)\big)^2}{\Big(\big(r\ \cos(\theta)\big)^2 + \big(r\ \sin(\theta)\big)^2\Big)^2}$$
$$= \frac{r^2\ \Big(\big(\cos(\theta)\big)^2 - \big(\sin(\theta)\big)^2\Big)}{r^4}$$
$$= \frac{\big(\cos(\theta)\big)^2 - \big(\sin(\theta)\big)^2}{r^2}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{-2\ \cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2}\ \cos(\theta) + \frac{\big(\cos(\theta)\big)^2 - \big(\sin(\theta)\big)^2}{r^2}\ \sin(\theta)$$
$$= \frac{-\sin(\theta)\ \Big(2\,\big(\cos(\theta)\big)^2 - \big(\cos(\theta)\big)^2 + \big(\sin(\theta)\big)^2\Big)}{r^2}$$
$$= \frac{-\sin(\theta)\ \Big(\big(\cos(\theta)\big)^2 + \big(\sin(\theta)\big)^2\Big)}{r^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r^2}$$

Toujours d'après la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) \times \big(-r\ \sin(\theta)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\Big) \times \big(r\ \cos(\theta)\big)$$
$$= \ \dots\ = \frac{\cos(\theta)}{r}$$

On peut vérifier ce calcul en remarquant :

$$h(r,\theta) = f\big(r\ \cos(\theta), r\ \sin(\theta)\big)$$
$$= \frac{r\ \sin(\theta)}{\big(r\ \cos(\theta)\big)^2 + \big(r\ \sin(\theta)\big)^2}$$
$$= \frac{r\ \sin(\theta)}{r^2\ \Big(\big(\cos(\theta)\big)^2 + \big(\sin(\theta)\big)^2\Big)} = \frac{\sin(\theta)}{r}$$

I.5.c) Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe

Théorème 8.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

On suppose de plus que U est une **partie convexe** *de $\mathbb{R}^p$.*

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur U.

La fonction f est constante sur U	$\Rightarrow$	• *La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U* • $\forall \overline{a} \in U,\ \nabla f\big(\overline{a}\big) = 0$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Une fonction nulle sur U est évidemment de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et de gradient nul en tout point de U.

($\Leftarrow$) Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et de gradient nul sur U.
Démontrons : $\forall \big(\overline{x}, \overline{y}\big) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p,\ f\big(\overline{x}\big) = f\big(\overline{y}\big)$.

- Soit $\big(\overline{x}, \overline{y}\big) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$. Considérons alors la fonction :

$$\varphi \ :\ \begin{array}{ccc} t & \mapsto & (t\,x_1 + (1-t)\,y_1, \dots, t\,x_p + (1-t)\,y_p) \\ [0,1] & \to & \mathbb{R}^p \end{array}$$

On note aussi, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $k \in [\![1,p]\!]$: $\varphi_k(t) = t\,x_k + (1-t)\,y_k$.
Autrement dit, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = t\,\overline{x} + (1-t)\,\overline{y}$.

- Considérons alors la fonction :

$$\psi \ :\ \begin{array}{ccc} t & \mapsto & f(t\,x_1 + (1-t)\,y_1, \dots, t\,x_p + (1-t)\,y_p) \\ [0,1] & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

Comme U est convexe, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) \in U$.
Ainsi, par composition, ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

- Par règle de la chaîne, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_p(t)\big) \times \varphi_k'(t) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_p(t)\big) \times (x_k - y_k) \\ &= \big\langle \nabla f\big(\varphi(t)\big), \overline{x} - \overline{y} \big\rangle \ = \ 0\end{aligned}$$

car : $\nabla f\big(\varphi(t)\big) = 0$ par hypothèse.

- On en déduit que la fonction ψ est constante sur $[0,1]$. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0,1],\ \psi(t) = \lambda$$

En particulier :

$$f\big(\overline{x}\big) = \psi(1) = \lambda = \psi(0) = f\big(\overline{y}\big)$$

$\square$

II. Fonctions de 2 variables : aspects géométriques

II.1. Lignes de niveau d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$

II.1.a) Définition

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur U et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On appelle **ligne de niveau** λ de f et on note $\Gamma_\lambda(f)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\boxed{\Gamma_\lambda(f) \ = \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in U \ \text{ et } \ f(x,y) = \lambda\} \ \subset \ \mathbb{R}^2}$$

Remarque

- La courbe représentative d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une courbe définie explicitement (la donnée d'une valeur de x fournit la valeur de y). En revanche, une ligne de niveau est une courbe définie implicitement. À x_0 fixé, il faut résoudre l'équation $f(x_0, y) = \lambda$ pour obtenir la ou `LES` valeurs de y correspondantes.
- Une ligne de niveau est généralement une courbe.

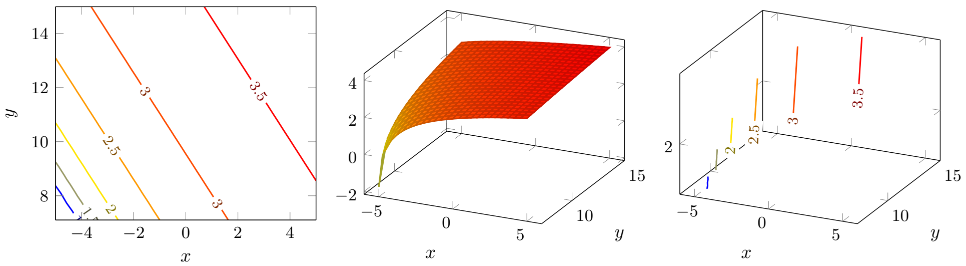
- Sur une carte du relief, on représente les isoplèthes : les lignes joignant des points d'égale altitude. Sur une carte météo, on représente souvent les isobares : les lignes joignant des points d'égale pression atmosphérique.
- Les lignes de niveau sont des courbes du plan qui informent sur la forme de la surface à tracer. Si la surface est tracée dans le repère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ (avec $\overrightarrow{k}$ dirigé vers le haut), on obtient $\Gamma_\lambda(f)$ en opérant comme suit :
  - × on tranche la surface à l'aide d'un hachoir à l'altitude (la hauteur) λ.
  - × on se place au-dessus de la figure (oeil au-dessus du vecteur $\overrightarrow{k}$) et on regarde le contour obtenu par le hachoir.

  La ligne de niveau est ce contour projeté sur le plan $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

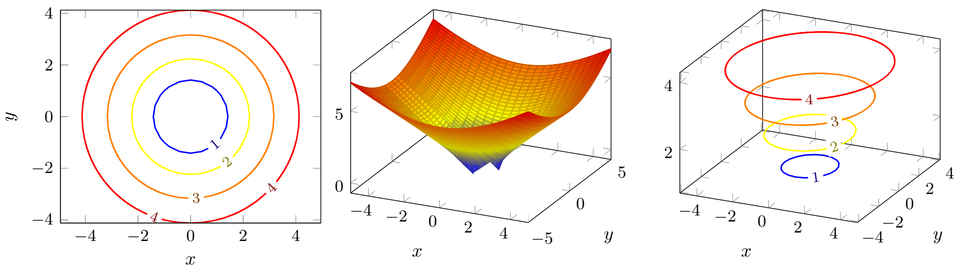
Quelques représentations graphiques

On donne ci-dessous quelques représentations graphiques.

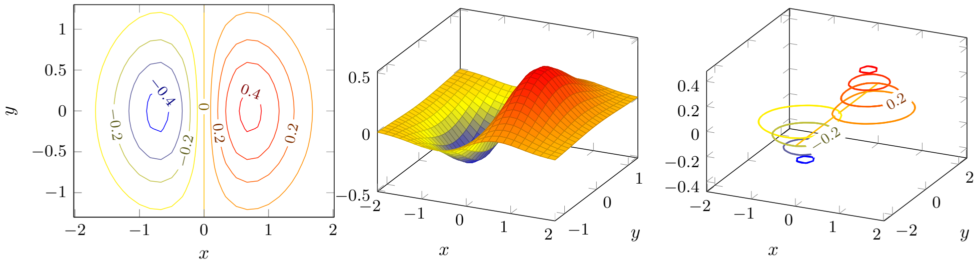
Représentation graphique de $f : (x, y) \mapsto \ln(3x + 2y + 1)$



Représentation graphique de $g : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$



Représentation graphique de $h : (x, y) \mapsto x \ \exp(-x^2 - y^2)$



Précisons les représentations précédentes. On a fait apparaître :

× à gauche, les lignes de niveau représentées dans le plan.

× au milieu, le tracé de la nappe (surface) représentative de la fonction.

× à droite les lignes de niveau placées dans l'espaces. C'est le contour qui apparaît lorsque le hachoir tranche à une certaine altitude.

- La surface représentative d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est un ensemble de points de l'espace $\mathbb{R}^3$.
- Une ligne de niveau de f est un ensemble de points du plan $\mathbb{R}^2$.

II.1.b) Paramétrage d'une ligne de niveau : introduction informelle

- Il est précisé que l'étude et le tracé d'arcs paramétrés sont hors programme. Cependant, la notion d'arc paramétré arrive relativement naturellement lorsque l'on étudie la notion de ligne de niveau.
- Considérons la fonction $g : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ dont on a donné une représentation graphique ci-contre. Étudions la ligne de niveau $\sqrt{3}$ (par exemple). Il s'agit de l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient :

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \sqrt{3} \qquad (n)$$

Cette équation équivaut à : $x^2 + y^2 = 4$.
Comment représenter cette ligne de niveau dans le repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$? Il y a essentiellement trois manières de faire.

1. Exprimer y en fonction de x

$$\begin{aligned} (n) \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 = 4 - x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |y| = \sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

La dernière équivalence n'est valable que si x est dans l'ensemble $[-2, 2]$.
Il s'agit alors de tracer sur $[-2, 2]$ les courbes :

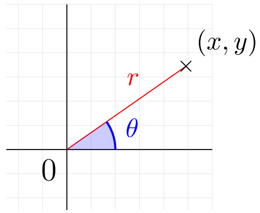
$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad \texttt{OU} \quad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

2. Effectuer l'étude en coordonnées polaires

Tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut être exprimer à l'aide de ses coordonnées polaires. Pour comprendre les coordonnées polaires, on peut considérer le nombre complexe $x + i\,y$. Il s'écrit de **manière unique** sous la forme :

$$x + i\,y \; = \; r\ \mathrm{e}^{i\,\theta} \; = \; r\ \cos(\theta) \qquad y = r\ \sin(\theta)$$

(le point (x, y) se situe au même endroit dans le plan réel que le point $r\ e^{i\,\theta}$ dans le plan complexe)



Il s'agit alors d'opérer la paramétrisation suivante :

$$x = r\ \cos(\theta) \qquad y = r\ \sin(\theta)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(n) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(r\ \cos(\theta)\big)^2 + \big(r\ \sin(\theta)\big)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad r^2\ \Big(\big(\cos(\theta)\big)^2 + \big(\sin(\theta)\big)^2\Big) = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad r^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad r = 2\end{aligned}$$

Il s'agit donc de tracer l'ensemble des points « de module 2 ».

3. Effectuer l'étude à l'aide d'un arc paramétré

On l'a vu en ***1.*** : lorsque l'on cherche à tracer une ligne de niveau, le tracé n'est pas forcément celui d'une fonction. Le problème provient du fait qu'à x_0 fixé, plusieurs valeurs de y_0 peuvent fournir un point (x_0, y_0) solution de (n). Les points solutions de (n) ne pourront donc pas forcément être tracés comme courbe représentative d'une fonction. Par exemple, les points $(0, 1)$ et $(0, -1)$:

× ont même valeur pour x,

× ont deux valeurs différentes pour y.

Si une même valeur de x fournit 2 valeurs différentes de y, les deux points sont quant à eux bien différents. On peut alors s'interroger sur la possibilité de trouver un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction :

$$\varphi : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$$

dont l'image $\varphi(I) = \{\big(x(t), y(t)\big) \mid t \in I\}$ fournirait exactement les points solutions de l'équation (n). Dans l'exercice qui nous intéresse, on peut par exemple choisir $I = [0, 2\,\pi[$ et φ définie par :

× $\varphi : t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big)$

× $\varphi : t \mapsto \big(\sin(t), \cos(t)\big)$

× $\varphi : t \mapsto \big(\cos(3t), \sin(3t)\big)$

× ...

Tous ces arcs paramétrés ont le même support mais ils possèdent une cinématique différente : lorsque t varie, un point de coordonnées $\varphi(t)$ va tracer le support de manière différente.

II.1.c) Existence d'un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$ pour les lignes de niveau

Théorème 9.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur U.
On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Soit $(x_0, y_0) \in U$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$ ((x_0, y_0) est un **point régulier***).*

1. a) *Il existe :*

× $\varepsilon > 0$,
× *deux intervalles ouverts I et J avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$,*
× *un arc paramétré $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to I \times J$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, (qu'on peut écrire $\varphi_1 :]-\varepsilon, \varepsilon[\to I$ et $\varphi_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\to I$)*

tels que :

$$\forall (x,y) \in I \times J, \ \boxed{f(x,y) = \lambda \ \Leftrightarrow \ \exists ! t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, (x,y) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)}$$

b) *De plus, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:*

$$\boxed{\big\langle \ \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big), \big(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)\big) \ \big\rangle = 0}$$

2. a) *Il existe :*

× *deux intervalles ouverts I et J avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$,*
× *une fonction $\alpha : I \to J$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,*

tels que :

$$\forall (x,y) \in I \times J, \ \boxed{f(x,y) = \lambda \ \Leftrightarrow \ y = \alpha(x)}$$

b) *De plus, pour tout $x \in I$:* $\boxed{\alpha'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}}$

Démonstration.

1. a) Admis.

Ce qu'il faut retenir de ce point est que, pour toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$, la courbe définie implicitement par $f(x,y) = \lambda$ admet un paramétrage **local** de classe $\mathscr{C}^1$. Tracer l'ensemble :

$$\{(x,y) \in I \times J \mid f(x,y) = \lambda\}$$

c'est alors tracer, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ le support de l'arc paramétré :

$$t \mapsto \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$$

b) Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:

$$f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) \ = \ \lambda \qquad (*)$$

D'après la règle de la chaîne (à venir), la fonction $\psi : t \mapsto f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et :

$$\psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) \times \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) \times \varphi_2'(t)$$

D'après $(*)$, la fonction ψ est constante sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et donc de dérivée nulle. On en conclut :

$$\big\langle \ \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big), \big(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)\big) \ \big\rangle = 0$$

2. a) Ce résultat est aussi admis. On retiendra, comme dans le cas précédent, qu'une ligne de niveau d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ admet localement un paramétrage de classe $\mathscr{C}^1$.

b) Raisonnement similaire à partir de l'équation : $f\big(x, \alpha(x)\big) = \lambda$. □

Remarque

- Ce théorème est un théorème d'existence. Il affirme l'existence d'un objet sans donner la manière de le construire. On sait donc qu'une ligne de niveau admet un paramétrage local mais on ne connaît pas de manière générale pour déterminer ce paramétrage local.
- Le point ***1.b)*** permet de retrouver que, lorsqu'il est non nul, le gradient est orthogonal au vecteur vitesse qui dirige le déplacement effectué le long d'une ligne de niveau.

II.1.d) Équation de la tangente à une ligne de niveau en un point régulier

Théorème 10.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur U.
On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\Gamma_\lambda(f) = \{(x,y) \mid f(x,y) = \lambda\}$ (ligne de niveau λ).
Soit $(x_0,y_0) \in \Gamma_\lambda(f)$.
On suppose $\nabla f(x_0,y_0) \neq (0,0)$ ((x_0,y_0) est un **point régulier***).*

1) La normale à $\Gamma_\lambda(f)$ en (x_0,y_0) est la droite passant par (x_0,y_0) dirigée par $\nabla f(x_0,y_0)$.

2) La courbe $\Gamma_\lambda(f)$ possède en (x_0,y_0) une tangente d'équation :

$$\boxed{(x-x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \;+\; (y-y_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \;=\; 0}$$

Cette équation s'obtient en remarquant :

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Gamma_\lambda \;&\Leftrightarrow\; \text{Le vecteur } \overrightarrow{M_0M} \text{ est orthogonal au vecteur gradient} \\ &\Leftrightarrow\; \left\langle \overrightarrow{M_0M}, \nabla f(M_0) \right\rangle \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow\; \langle (x-x_0, y-y_0), \nabla f(x_0,y_0) \rangle \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow\; \left\langle (x-x_0, y-y_0), \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right) \right\rangle \;=\; 0 \end{aligned}$$

Remarque

Considérons la fonction $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2-1}$. La ligne de niveau 3 est l'ensemble des points (x,y) tels que : $\sqrt{x^2+y^2-1} = 3$.
L'équation de la tangente à cette ligne de niveau au point $(\sqrt{10},0) \in \Gamma_3$ est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{10},0) \times (x-\sqrt{10}) + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{10},0)} \times (y-0) \;=\; 0$$

C'est la droite d'équation : $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10-1}}\; x = \sqrt{10}$ (c'est-à-dire : $x = \sqrt{10-1}$).

II.2. Surface définie implicitement

II.2.a) Introduction

- Dans le paragraphe précédent, on s'est intéressé aux lignes de niveau λ d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (définie sur un ouvert U). Rappelons :

$$\Gamma_\lambda(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in U \text{ et } f(x,y) = \lambda\}$$

  Une ligne de niveau est une courbe (objet de « dimension 1 ») qui est tracée dans le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

- La surface représentative d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est, par définition, l'ensemble des points :

$$S(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U \text{ et } z = f(x,y)\}$$

  Une surface est un objet de « dimension 2 » qui est défini dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
  Cet ensemble de points peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} S(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U \text{ et } f(x,y) - z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U \text{ et } \tilde{f}(x,y,z) = 0\} \end{aligned}$$

  où on a noté $\tilde{f} : (x,y,z) \to f(x,y) - z$.
  Il est donc assez naturel de s'intéresser à la surface obtenue comme tous les points qui annulent une fonction de 3 variables. On considère alors des fonctions de 3 variables quelconques et on ne se limite donc pas à celles qui peuvent s'écrire sous la forme $\tilde{f}$ où f est une fonction de 2 variables. Une telle limitation réduirait l'expressivité de la construction.

- Pour bien comprendre ce dernier point, considérons la surface définie par l'équation :
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$
Pour un couple fixé $(x_0, y_0) = (1, -1)$, deux valeurs de z sont possibles : $z = 1$ et $z = -1$. Une telle surface ne pourra donc pas être entièrement décrite comme ensemble des points (x, y, z) solutions d'une équation de la forme : $z = f(x, y)$ car dans cette dernière écriture, à chaque couple (x, y) fixé correspond une unique valeur de z. On s'intéressera donc à l'ensemble des points :
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$$
où $g : (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2 - 1$.
- Jusqu'à présent, on a défini la notion de ligne de niveau d'une fonction de 2 variables. Mais il serait aussi intéressant de définir la ligne de niveau λ d'une surface S_g :
$$\Gamma_\lambda(S_g) \quad = \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y, \lambda) = 0\}$$
On comprend au passage pourquoi on définit la notion de ligne de niveau à l'aide d'une fonction de 2 variables.
- On peut enfin vouloir représenter une telle courbe sur la surface S_g. Autrement dit, on s'intéresse à l'ensemble des points obtenu par intersection de la surface S_g et du plan d'équation $z = \lambda$.
$$\begin{aligned} & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0 \text{ et } z = \lambda\} \\ = \quad & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, \lambda) = 0\} \ \subset \ \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$
- De manière générale, si g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$, on appelle **courbe tracée sur la surface** S_g, la donnée d'un arc paramétré $\varphi : t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ défini sur un intervalle I et qui vérifie :
$$\forall t \in I, \ g\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0$$
On notera qu'en tout point régulier $\big(x_0, y_0, z_0\big)$ de S_g et de l'arc paramétré, la tangente à l'arc en le point $\big(x_0, y_0, z_0\big)$ est incluse dans le plan tangent à S_g en $\big(x_0, y_0, z_0\big)$.

II.2.b) Équation de la tangente à une surface en un point régulier

Théorème 11.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$.
Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie sur U.
On note $S(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$.
On suppose que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Soit $(x_0, y_0, z_0) \in U$
On suppose $\nabla g(x_0, y_0, y_0) \neq (0, 0, 0)$ ((x_0, y_0, z_0) est un **point régulier***).*

1) En tout point régulier (x_0, y_0, z_0), la surface $S(g)$ possède un plan tangent dont la normale est dirigée par $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.

2) La courbe $S(g)$ possède en (x_0, y_0, z_0) un plan tangent d'équation :

$$\boxed{\begin{array}{rl} & (x - x_0) \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ + & (y - y_0) \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ + & (z - z_0) \ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \ = \ 0 \end{array}}$$

Cette équation s'obtient en remarquant :

$$\begin{aligned} & M(x, y, z) \ \in S(g) \\ \Leftrightarrow \ & \textit{Le vecteur } \overrightarrow{M_0 M} \textit{ est orthogonal au vecteur gradient} \\ \Leftrightarrow \ & \left\langle \overrightarrow{M_0 M}, \nabla f(M_0) \right\rangle \ = \ 0 \\ \Leftrightarrow \ & \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \nabla f(x_0, y_0, z_0) \rangle \ = \ 0 \\ \Leftrightarrow \ & \left\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \right) \right\rangle \ = \ 0 \end{aligned}$$

Exercice
Déterminer le plan tangent à la surface $S(g)$ au point $(\sqrt{10}, 0, 3)$
où $g : (x, y, z) \mapsto f(x, y) - z$.

III. Calcul différentiel d'ordre 2 pour les fonctions de p variables

III.1. Dérivées partielles d'ordre 2

III.1.a) Définition

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.
Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.
On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1.
Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$.

- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la** $i^{\text{ème}}$ **variable** si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur U.

  Dans ce cas, on note : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}$

- On dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la** $i^{\text{ème}}$ **variable puis par rapport à la** $j^{\text{ème}}$ **variable** si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable sur U.

  Dans ce cas, on note : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}$

Remarque

- Une fonction de p variables de classe $\mathscr{C}^1$ admet p fonctions dérivées partielles d'ordre 1. Chacune d'entre elles pouvant admettre p fonctions dérivées partielles, on définit ainsi p^2 fonctions dérivées partielles.
- En particulier, lorsque $p = 2$, une fonction de 2 variables admet, en cas d'existence, 4 fonctions dérivées partielles d'ordre 2.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ pour tout couple (x, y) dans l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$.

Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 et les déterminer.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ car elle est le produit $f = f_1 \times (f_2 + f_3)$ où :
  - × $f_1 : (x, y) \mapsto x + y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U car polynomiale.
  - × $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U car elle est la composée $f_2 = \psi \circ g$ où :
    - $g : (x, y) \mapsto x$ est :
      - ▶ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U car polynomiale.
      - ▶ telle que $g(U) \subset]0, +\infty[$.
    - $\psi : z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
  - × $f_3 : (x, y) \mapsto \frac{1}{y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U pour des raisons similaires à f_2.
- Les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont données par, pour tout $(x, y) \in U$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$
- On peut démontrer que les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont elles aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Elles admettent des dérivées partielles d'ordre 1 qui sont données par, pour tout $(x, y) \in U$:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{x^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \quad \text{et} \quad \partial^2_{22}(f)(x, y) = \frac{2x}{y^3}$$

□

III.2. Fonctions de p variables de classe $\mathscr{C}^2$ sur une partie U

III.2.a) Définition

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.

On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^2$ si :

× elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 selon chaque couple de variables,

× et que ces p^2 dérivées partielles à l'ordre 2 sont continues sur U.

Théorème 12.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U $\Rightarrow$ *La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U*

III.2.b) Le cas des fonctions polynomiales

Théorème 13.

Toute fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$.

Remarque

En particulier, les fonctions coordonnées sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$.

III.2.c) Stabilité du caractère $\mathscr{C}^2$ par opérations algébriques

Théorème 14.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur U.

1)
- *f_1 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*
- *f_2 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*

$\Rightarrow$ *Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*

2)
- *f_1 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*
- *f_2 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*

$\Rightarrow$ *La fonction $f_1 \times f_2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*

3)
- *f_1 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*
- *f_2*
  - × *est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*
  - × NE S'ANNULE PAS *sur U*

$\Rightarrow$ *La fonction $\dfrac{f_1}{f_2}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U*

Remarque

- On retiendra que :
  - × la combinaison linéaire,
  - × le produit,
  - × le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas !),

  de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
- Les formules d'obtention des dérivées partielles d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient sont obtenues par les formules de dérivations usuelles.

III.2.d) Stabilité du caractère $\mathscr{C}^2$ par composition

Théorème 15.

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit I un intervalle réel.

Soit $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

Notons $f = \psi \circ g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U en tant que composée $f = \psi \circ g$ où :

× *g est :*
  - *de classe $\mathscr{C}^2$ sur U,*
  - *telle que : $g(U) \subset I$.*

× *ψ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.*

III.3. Matrice hessienne d'une fonction de p variables

III.3.a) Définition

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 2.

Soit $\overline{a} = (a_1, \dots, a_p) \in U$.

- On appelle matrice **hessienne** de f en $\overline{a}$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ notée $H_f(\overline{a})$ et définie par :

$$H_f(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overline{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(\overline{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(\overline{a}) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

III.3.b) Théorème de Schwarz et conséquence

Théorème 16.

Soit U un `OUVERT` *de $\mathbb{R}^p$.*

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

1. $\boxed{\forall \overline{a},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{a}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overline{a})}$

2. On en déduit que la matrice hessienne de f en tout point $\overline{a} \in U$ est symétrique réelle.

En particulier, $H_f(\overline{a})$ est donc ortho-diagonalisable (il existe une base orthonormée de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de f).

Ceci est faux si f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $U =]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ par :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 \ln(y) - y \ln(x)$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U.

2. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

III.4. Développement limité d'ordre 2

Théorème 17 *(formule de Taylor-Young)***.**

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Soit $\overline{a} \in U$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U	$\Rightarrow$	*La fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 en tout point $\overline{a} \in U$*

Si c'est le cas, il existe $\varepsilon : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $\left\{\begin{array}{l} \times \text{ définie au voisinage de } (0,\dots,0), \\ \times \text{ de limite nulle en } (0,\dots,0), \end{array}\right.$

tels que, pour tout $\overline{h} \in \mathbb{R}^p$ $\left\{\begin{array}{l} \times \text{ dans un voisinage de } (0,\dots,0), \\ \times \text{ tels que } \overline{a}+\overline{h} = (a_1+h_1,\dots,a_p+h_p) \in U, \end{array}\right.$

on a :

$$\boxed{f\left(\overline{a}+\overline{h}\right) \;=\; f(\overline{a}) + \left(\nabla f(\overline{a})\right)^T \overline{h} + \frac{1}{2}\left(\overline{h}\right)^T H_f(\overline{a})\ \overline{h} + \left\|\overline{h}\right\|_2^2 \times \varepsilon\left(\overline{h}\right)}$$

Remarque

- Cette formule est l'analogue de la formule pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\times h + f''(x_0)\times h^2 + h^2\ \varepsilon(h)$$

  où ε est une fonction définie dans un voisinage de 0 telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

- La notation $\left\|\overline{h}\right\|_2^2 \times \varepsilon\left(\overline{h}\right)$ est une manière générique de noter :

$$\underset{\overline{h}\to(0,\dots,0)}{o}\left(\ \left\|\overline{h}\right\|_2^2\ \right)$$

- Les notations utilisées dans le programme officiel ne sont pas cohérentes :
  - $\times$ l'écriture $f\left(\overline{a}+\overline{h}\right)$ indique que $\overline{h}$ est un élément de $\mathbb{R}^p$.
  - $\times$ l'écriture $\left(\nabla f(\overline{a})\right)^T\ \overline{h}$ indique que l'on considère :
    - $\nabla f(\overline{a})$ comme un élément de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,
      (entre en conflit avec la notation $\langle \nabla f(\overline{a}), \overline{h}\rangle$)
    - $\overline{h}$ comme un élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$
      (entre en conflit avec la notation initiale)

Étude du cas $p = 2$

- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  Soit $(x_0, y_0) \in U$. On considère la fonction :

$$q_{(x_0,y_0)} \ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (h,k) & \mapsto & \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}^T \times H_f(x_0,y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \end{array}$$

  Le fait que la matrice $H_f(x_0,y_0)$ soit symétrique réelle fait de $q_{(x_0,y_0)}$ une **forme quadratique**.

- Imaginons que la matrice $H_f(x_0,y_0)$ associée à cette forme quadratique soit diagonale. On a alors, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$q_{(x_0,y_0)}(h,k) \;=\; {}^tU \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \times U \;=\; \lambda_1\ h^2 + \lambda_2\ k^2$$

  où on a noté $U = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

  Détaillons maintenant quelques propriétés de cette forme quadratique $q_{(x_0,y_0)}(h,k)$.

- Tout d'abord, étudions le signe de $q_{(x_0,y_0)}(h,k)$.
  Plusieurs cas se présentent :
  × si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$:
  $$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0,0)\},\ q_{(x_0,y_0)}(h,k) > 0$$
  L'inégalité est large si $\lambda_1\lambda_2 = 0$ ($\lambda_1 = 0$ `OU` $\lambda_2 = 0$).
  × si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$:
  $$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0,0)\},\ q_{(x_0,y_0)}(h,k) < 0$$
  L'inégalité est large si $\lambda_1\lambda_2 = 0$ ($\lambda_1 = 0$ `OU` $\lambda_2 = 0$).
  × si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$ `OU` si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$
  Alors $q_{(x_0,y_0)}$ n'est pas de signe constant (prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives).
- Ce résultat obtenu dans le cas où $q_{(x_0,y_0)}$ est diagonale est en réalité vérifié sans cette hypothèse. Comme $H_f(x_0,y_0)$ est une matrice symétrique réelle, $H_f(x_0,y_0)$ est ortho-diagonalisable.
  Il existe donc $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
  $$H_f(x_0,y_0) \quad = \quad P \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ P^{-1}$$
  Mieux : l'étude de la diagonalisabilité des matrices symétriques permet d'affirmer que $P^{-1} = {}^tP$ (on dit que P est une matrice **orthogonale**).
  En notant $U = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, on obtient alors :
  $$\begin{array}{rcl} {}^tU\ H_f(x_0,y_0)\ U & = & {}^tU\ {}^tP^{-1} \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ P^{-1}U \\ & = & {}^t\big(P^{-1}U\big) \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ \big(P^{-1}U\big) \\ & = & {}^tV \ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ V \ = \ \lambda_1\, v_1^2 + \lambda_2\, v_2^2 \end{array}$$
  en notant $V = P^{-1}U = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
- Citons enfin une dernière propriété.
  Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^p$ et soit $a \in \mathbb{R}$. On a alors :
  $$\begin{array}{rcl} q_{(x_0,y_0)}\big(a\,h, a\,k\big) & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times a^2\,h^2 \\ & & + \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \times a^2\,kh \\ & & + \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \times a^2\,hk \\ & & + \ \partial^2_{22}(f)(x_0,y_0) \times a^2\,k^2 \\ & = & a^2 \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times h^2 \\ & & + \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \times kh \\ & & + \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \times hk \\ & & + \ \partial^2_{22}(f)(x_0,y_0) \times k^2 \Big) \\ & = & a^2 \ \Big(q_{(x_0,y_0)}(h,k)\Big) \end{array}$$
  $$\boxed{q_{(x_0,y_0)}\big(a \times (h,k)\big) \ = \ a^2 \times q_{(x_0,y_0)}(h,k)}$$
  On voit apparaître ici le caractère quadratique de $q_{(x_0,y_0)}$.
  En prenant $a = \dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$, on en déduit :
  $$\begin{array}{rcl} q_{(x_0,y_0)}\left(\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) & = & q_{(x_0,y_0)}\left(\dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \times (h,k)\right) \\ & = & \dfrac{1}{h^2+k^2} \times q_{(x_0,y_0)}(h,k) \end{array}$$

IV. Extrema locaux d'une fonction réelle de p variables réelles

IV.1. Définition

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

Soit $\overline{a} \in D$.

- On dit que f admet un **maximum local** en $\overline{a}$ s'il existe un ouvert $V \subset D$ tel que :

$$\boxed{\forall \overline{x} \in V,\ f(\overline{x}) \leqslant f(\overline{a})}$$

  Le maximum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $\overline{x} \in D$.

- On dit que f admet un **minimum local** en $\overline{a}$ s'il existe un ouvert $V \subset D$ tel que :

$$\boxed{\forall \overline{x} \in V,\ f(\overline{x}) \geqslant f(\overline{a})}$$

  Le minimum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $\overline{x} \in D$.

Remarque

- De manière équivalente, f admet un **maximum local** en $\overline{a}$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall \overline{x} \in B(\overline{a}, r),\ f(\overline{x}) \leqslant f(\overline{a})}$$

IV.2. Lien entre extrema locaux et points critiques

IV.2.a) Notion de point critique

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur U.

Soit $\overline{a} \in U$.

On dit que $\overline{a} \in U$ est un **point critique** de f si :

$$\boxed{\nabla f(\overline{a}) = 0_{\mathbb{R}^p}}$$

Autrement dit si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) = 0$.

Exemple

Déterminons les points critiques de la fonction $h : (x, y) \mapsto x\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

$$\begin{aligned}
& \nabla(h)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(h)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(h)(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{rcl} \left(1-2x^2\right)\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} & = & 0 \\ -2\,xy\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} & = & 0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} \left(1-2x^2\right) = 0 \quad \texttt{OU} \quad \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \\ x = 0 \quad \texttt{OU} \quad y = 0 \quad \texttt{OU} \quad \mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2} \\ x = 0 \quad \texttt{OU} \quad y = 0 \end{array}\right. \qquad \textit{(car } e^{-x^2-y^2} > 0\textit{)} \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \texttt{OU} \quad x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x = 0 \quad \texttt{OU} \quad y = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \left\{\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0\right),\ \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0\right)\right\}
\end{aligned}$$

MÉTHODO (*dans le cas $p = 2$*)

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc.
  1) Méthode directe
  a) **Résolution par manipulations algébriques**
  Il peut arriver que la résolution soit simple et que de simple manipulations algébriques permettent de résoudre le système considéré. C'est le cas pour l'étude des points critiques de la fonction h précédente.
  b) **Résolution par manipulations algébriques et substitutions**
  Il est assez fréquent de chercher à obtenir, par manipulation des équations, une équation du type : $x = \psi(y)$.
  Une telle équation est particulièrement intéressante. En l'injectant dans l'autre équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que de la variable y.
  2) De manière plus subtile, il est aussi assez fréquent faire apparaître une équation du type : $\varphi(x) = \varphi(y)$, où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective. En réalité, c'est le caractère injectif qui importe ici (on l'obtient généralement par stricte monotonie de φ). En effet, cette propriété permet alors de conclure : $x = y$.
  En remplaçant x par y dans l'autre équation, on obtient alors une nouvelle équation qui ne dépend plus que de la variable y.
  3) Enfin, il est aussi possible de tomber sur une équation du type : $\phi(x) = 0$. Cette équation admet généralement une unique solution α (voire deux solutions α et β), ce qui est généralement démontré en début d'exercice.

IV.2.b) Condition nécessaire d'extremum local

Théorème 18 (*Condition nécessaire d'extremum local*)**.**
Soit U un **ouvert** *de $\mathbb{R}^p$.*
Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.
On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur U.
Soit $\overline{a} \in U$.

$$f \text{ admet un extremum local en } \overline{a} \quad \Rightarrow \quad \overline{a} \text{ est un point critique de } f$$

Comme pour les fonctions d'une variable réelle, c'est une condition **nécessaire** mais **pas suffisante**.

Remarque

- D'après le théorème précédent, les extrema locaux sur un **ouvert** $U \subset \mathbb{R}^p$ d'une fonction de p variables sont à chercher parmi les points critiques. On pourrait alors dire, que les points critiques sont les extrema locaux **possibles** de la fonction f.
- La démarche de détermination d'un extremum local est donc la suivante :
  1) déterminer les points critiques.
  2) vérifier si ces points critiques sont ou non des extrema locaux.

IV.3. Comportement local d'une fonction de p variables au voisinage d'un point critique

IV.3.a) Préambule dans le cas $p = 2$

Remarque

- Rappelons tout d'abord que les extrema locaux d'une fonction de deux variables sont à chercher parmi ses points critiques.
- Considérons un point critique $(x_0, y_0) \in U$ de f où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Rappelons que si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(0,0)$ et de limite nulle en $(0,0)$, telle que, pour tout

$$(h,k) \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{l} \times \text{ dans un voisinage de } (0,0), \\ \times \text{ tels que } (x_0+h, y_0+k) \in U, \end{array} \right. \quad \text{on a :}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f(x_0+h, y_0+k) & = & f(x_0, y_0) \\ & & + \cancel{\langle \nabla(f)(x_0,y_0), (h,k) \rangle} \\ & & + \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \times \nabla^2(f)(x_0,y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ & & + (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k) \end{array}}$$

- En nommant $q_{(x_0,y_0)}(h,k)$ le terme d'ordre 2, on obtient :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\, q_{(x_0,y_0)}(h,k) + (h^2+k^2)\, \varepsilon(h,k)$$

  Le signe de la quantité $q_{(x_0,y_0)}(h,k)$ nous fournit la solution :

  1) si pour tout (h,k), $q_{(x_0,y_0)}(h,k) > 0$, alors $f(x_0+h, y_0+k) > f(x_0,y_0)$ et f admet un minimum local en (x_0, y_0).

  2) si pour tout (h,k), $q_{(x_0,y_0)}(h,k) < 0$, alors $f(x_0+h, y_0+k) > f(x_0,y_0)$ et f admet un maximum local en (x_0, y_0).

  3) si le signe n'est pas constant, f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0).

IV.3.b) Démontrer qu'une fonction admet un extremum local en un point critique

Théorème 19 (Condition suffisante d'extremum local)**.**

Soit D un `OUVERT` *de $\mathbb{R}^p$.*

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U.

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Soit $\overline{a} \in U$ un point critique de f.

- *La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U. Ainsi, la matrice hessienne $H_f(\overline{a})$ est symétrique réelle (d'après le théorème de Schwarz).*
  Elle est donc ortho-diagonalisable et il existe $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$H_f(\overline{a}) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix} P^{-1}$$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de $H_f(\overline{a})$)

1)	*Les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de $H_f(\overline{a})$ sont strictement positives*	$\Rightarrow$	*f admet un minimum local en $\overline{a}$*
2)	*Les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de $H_f(\overline{a})$ sont strictement négatives*	$\Rightarrow$	*f admet un maximum local en $\overline{a}$*
3)	*Au moins 2 valeurs propres λ_i et λ_j de $H_f(\overline{a})$ sont non nulles et de signes opposés*	$\Rightarrow$	*f n'admet pas d'extremum local en $\overline{a}$*

4) Si au moins une valeur propre de $H_f(\overline{a})$ est nulle, on ne peut rien conclure par cette méthode. Il faudra alors procéder à une étude plus précise.

Démonstration.
La démonstration de l'énoncé général n'est pas au programme. On traite ici, pour la culture, le cas $p = 2$. On utilisera les propriétés précédemment démontrées sur la forme quadratique $q_{(x_0,y_0)}$.

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U.
  Elle admet donc un développement limité en $(x_0, y_0) \in U$.
  Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^p$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$, on a :

$$\begin{aligned} & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) \\ = \quad & \cancel{{}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} \\ + \quad & \frac{1}{2}\,\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \times H_f(x_0, y_0) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k) \\ = \quad & \frac{1}{2}\, q_{(x_0,y_0)}(h,k) + (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k) \\ = \quad & \frac{1}{2}\,(h^2+k^2)\ q_{(x_0,y_0)}\big(\tfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \tfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\big) + (h^2+k^2) \times \varepsilon(h,k) \\ = \quad & (h^2+k^2)\ \Big(q_{(x_0,y_0)}\big(\tfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \tfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\big) + \varepsilon(h,k)\Big) \end{aligned}$$

- Remarquons alors que le point $\big(\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\big)$ appartient à la boule $B_f(0,1)$ (c'est un élément du bord de cette boule).
  La fonction $g = \frac{1}{2}\, q_{(x_0,y_0)}$ est une fonction polynomiale à deux indéterminées. Elle est donc continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et en particulier sur $B_f(0,1)$.
  La fonction g est continue sur la partie fermée et bornée $B_f(0,1)$.
  Elle admet donc sur cette partie un minimum noté m et un maximum noté M (*théorème à venir !*). On en déduit, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^p$:

$$m \ \leqslant\ \frac{1}{2}\, q_{(x_0,y_0)}\big(\tfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \tfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\big) \ \leqslant\ M$$

$$\text{et} \quad m + \varepsilon(h,k) \ \leqslant\ q_{(x_0,y_0)}\big(\tfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}, \tfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + \varepsilon(h,k)\big) \ \leqslant\ M + \varepsilon(h,k)$$

- Finalement, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^p$:

$$(h^2+k^2)\,\big(m+\varepsilon(h,k)\big) \ \leqslant\ f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) \ \leqslant\ (h^2+k^2)\,\big(M+\varepsilon(h,k)\big)$$

- Étudions maintenant les cas proposés par le théorème.

  1) si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ alors la forme quadratique $q_{(x_0,y_0)}$ est strictement positive en tout point différent de $(0,0)$. On en déduit : $m > 0$.
  Et comme ε est de limite nulle en $(0,0)$, on a, au voisinage de $(0,0)$:

$$\big|\ \varepsilon(h,k)\ \big| \ \leqslant\ \frac{m}{2} \qquad \text{et ainsi} \qquad -\ \frac{m}{2} \ \leqslant\ \varepsilon(h,k) \ \leqslant\ \frac{m}{2}$$

  Ainsi, au voisinage épointé de $(0,0)$:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) \ \geqslant\ (h^2+k^2)\ \frac{m}{2} \ >\ 0$$

  D'où : $f(x_0+h, y_0+k) > f(x_0, y_0)$.
  La fonction f atteint bien un minimum local en (x_0, y_0).

  2) si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors la forme quadratique $q_{(x_0,y_0)}$ est strictement négative en tout point différent de $(0,0)$. On en déduit : $M < 0$.
  Et comme ε est de limite nulle en $(0,0)$, on a, au voisinage de $(0,0)$:

$$\big|\ \varepsilon(h,k)\ \big| \ \leqslant\ -\frac{M}{2} \qquad \text{et ainsi} \qquad \frac{M}{2} \ \leqslant\ \varepsilon(h,k) \ \leqslant\ -\frac{M}{2}$$

  Ainsi, au voisinage épointé de $(0,0)$:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) \ \leqslant\ (h^2+k^2)\ \frac{M}{2} \ <\ 0$$

  D'où : $f(x_0+h, y_0+k) < f(x_0, y_0)$.
  La fonction f atteint bien un maximum local en (x_0, y_0).

  3) Admis. L'idée est de démontrer la contraposée :

$$f \text{ admet un extremum local en } (x_0, y_0) \ \Rightarrow\ \lambda_1 \times \lambda_2 \geqslant 0$$

  Il s'agit de démontrer que si f admet un minimum (resp. maximum) local en M_0 alors $q_{(x_0,y_0)}$ est une fonction positive (resp. négative). □

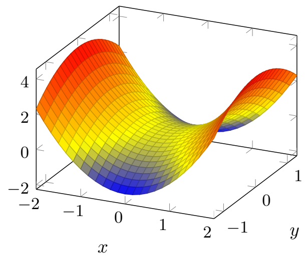
Exemple

1) Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

- La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
  Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$
- Le seul point critique de f est donc $(0, 0)$.
  Calculons la matrice hessienne de f. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
  $$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- On a donc $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et la seule valeur propre de $H_f(0, 0)$ est $2 > 0$. La fonction f admet un minimum local en $(0, 0)$, ce qui est cohérent avec le graphe de f.

2) Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

- La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
  Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$
- Le seul point critique de f est donc $(0, 0)$.
  Calculons la matrice hessienne de f. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
  $$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
- On a donc $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, et les valeurs propres de $H_f(0, 0)$ sont non nulles et de signe opposé. La fonction f admet un point selle en $(0, 0)$ ce qui est cohérent avec le graphe de f.



Graphe de la fonction g_2

3) Déterminer puis étudier les points critiques de $f(x, y) = xy$.

- La fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
  Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$
  Le seul point critique de f est donc $(0, 0)$. Calculons la matrice hessienne de f. Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$:
  $$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  On a donc $H = H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Le déterminant de $H - \lambda I$ est donné par $\lambda^2 - 1$, et on déduit que $H - \lambda I$ n'est pas inversible si, et seulement si, λ vaut -1 ou 1.
  Les valeurs propres de $H_f(0, 0)$ sont -1 et 1 qui sont non nulles et de signe opposé.
  La fonction f admet un point selle en $(0, 0)$ ce qui est cohérent avec le graphe de f.

IV.3.c) Démontrer qu'une fonction n'admet pas d'extremum local en un point critique

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

2. Déterminer un équivalent de $f(x,x) - f(0,0)$ et de $f(x,0) - f(0,0)$ lorsque x tend vers 0. La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0,0)$?

3. Rechercher les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

MÉTHODO

- Rappelons tout d'abord que les extrema locaux d'une fonction de deux variables sont à chercher parmi ses points critiques.
- Pour démontrer que f n'admet pas de maximum local en un point critique (x_0, y_0), on s'intéresse au comportement local de cette fonction. Plus précisément, on procède généralement comme suit :
  - × on se place en (x_0, y_0) et on calcule la valeur $f(x_0, y_0)$.
  - × on se déplace alors autour de (x_0, y_0). Pour ce faire, on considère les points de la forme $(x_0 + h, y_0 + k)$ où h et k sont des réels dans un voisinage de 0.
  - × on démontre alors :
  $$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$$
  ce qui permet de conclure que (x_0, y_0) n'est pas un maximum local.
- On agit évidemment de même pour démontrer que f n'admet pas de minimum local en (x_0, y_0). Plus précisément, on cherche à exhiber $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ dans un voisinage de $(0,0)$ tel que :
  $$f(x_0 + h, y_0 + k) < f(x_0, y_0)$$
- Les choix de h et k sont souvent guidés par l'exercice. Il est très fréquent de regarder les valeurs que l'on obtient pour f en partant de (x_0, y_0) suivant une direction précise. On peut par exemple considérer la direction :
  - × $(h, -h)$ et ainsi comparer $f(x_0 + h, y_0 - h)$ à $f(x_0, y_0)$.
  - × (h, h) et ainsi comparer $f(x_0 + h, y_0 + h)$ à $f(x_0, y_0)$.
  - × $(0, h)$ et ainsi comparer $f(x_0, y_0 + h)$ à $f(x_0, y_0)$.
  - × $(h, 0)$ et ainsi comparer $f(x_0 + h, y_0)$ à $f(x_0, y_0)$.
- Notons que si l'on démontre que (x_0, y_0) n'est pas un extremum local, alors il n'est pas non plus un extremum global.

IV.4. Condition suffisante d'extremum local (bis) - cas $p = 2$

Théorème 20 (Condition suffisante d'extremum local)**.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un **ouvert** *$U \subset \mathbb{R}^2$.*

On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Soit (x_0, y_0) un point critique de f.

Notons :
$$\begin{aligned}\Delta &= \det\left(H_f(x_0,y_0)\right)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \; - \; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2\end{aligned}$$

1) $\boxed{\text{Si } \Delta > 0 \text{ alors } f \text{ admet un extremum local au point } (x_0, y_0).}$

a. *Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ ($\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr}\left(H_f(x_0,y_0)\right) > 0$), c'est un minimum.*

b. *Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ ($\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr}\left(H_f(x_0,y_0)\right) < 0$), c'est un maximum.*

2) $\boxed{\text{Si } \Delta < 0 \text{ alors } f \text{ n'admet pas d'extremum local au point } (x_0, y_0).}$

3) $\boxed{\text{Si } \Delta = 0, \text{ on ne peut pas conclure par cette méthode.}}$

Il faudra alors procéder à une étude plus précise.

Remarque

- Il est précisé dans le programme officiel que le résultat dans le cas p quelconque doit être explicité pour le cas $p = 2$ (trace et déterminant).
- Ce résultat est souvent présenté avec les notations dues à Monge. Plus précisément, on note :

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

En particulier : $\Delta = rt - s^2$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U.
Ainsi, $H = H_f(x_0, y_0)$ est symétrique réelle et donc ortho-diagonalisable.
On en conclut qu'il existe $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$H_f(x_0,y_0) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de $H_f(x_0, y_0)$)

Dans la suite, on adopte les notations de Monge, à savoir :

$$H = H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

- Remarquons alors :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } H \quad &\Leftrightarrow \quad H - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \quad \det\left(H - \lambda I_2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{pmatrix} r-\lambda & s \\ s & t-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (r-\lambda)(t-\lambda) - s^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - (r+t)\lambda + (rt - s^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda \text{ est racine du polynôme} \\ Q(X) = X^2 - (r+t)X + (rt - s^2) \end{array} \end{aligned}$$

- Comme λ_1 et λ_2 sont valeurs propres (pas forcément distinctes !), alors elles sont racines de P. Précisons que P ne peut admettre d'autre racine (sinon H aurait une valeur propre différente de λ_1 et λ_2). On en déduit que P est facteur de $(X - \lambda_1)$ et $(X - \lambda_2)$. Enfin, comme Q est unitaire :

$$\begin{aligned} Q(X) &= (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \\ &= X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

- On en déduit, par identification :

$$\left\{\begin{array}{rcl} r+t & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ rt - s^2 & = & \lambda_1\,\lambda_2 \end{array}\right.$$

Plusieurs cas se présentent alors.

1) Si $rt - s^2 > 0$ alors $\lambda_1\,\lambda_2 > 0$.
Ainsi, λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe.
On en déduit que f atteint un extremum local en (x_0, y_0).
Il reste alors à déterminer le signe de ces valeurs propres pour conclure quant au type de cet extremum. Remarquons :

$$rt \ = \ \lambda_1\,\lambda_2 + s^2 \ > \ 0$$

Ainsi, r et t sont aussi deux quantités non nulles et de même signe.

a. Si $r > 0$ alors $r + t > 0$.
Ainsi $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et comme ces deux valeurs propres sont de même signe, on conclut $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

b. Si $r > 0$ alors $r + t < 0$.
Et par le même raisonnement, on conclut $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

2) Si $rt - s^2 > 0$ alors $\lambda_1\,\lambda_2 < 0$.
On en déduit que f admet un point selle en (x_0, y_0).

3) Si $rt - s^2 = 0$ alors $\lambda_1\,\lambda_2 = 0$. L'une (au moins) des deux valeurs propres de H est nulle. On ne peut conclure par cette méthode. □

Remarque
Si l'on connaît les propriétés des opérateurs tr et det, il est simple d'obtenir le lien entre les valeurs propres et les coefficients de la matrice hessienne :

$$\begin{array}{rcl} \det\left(P^{-1}HP\right) & = & \det(P^{-1})\ \det(H)\ \det(P) \ = \ \det(P^{-1})\ \det(P)\ \det(H) \\ & = & \det(P^{-1}P)\ \det(H) \ = \ \det(H) \end{array}$$

D'où : $\lambda_1\,\lambda_2 = rt - s^2$.

$$\operatorname{tr}\left(P^{-1}(HP)\right) \ = \ \operatorname{tr}\left((HP)P^{-1}\right) \ = \ \operatorname{tr}\left((HP)P^{-1}\right) \ = \ \operatorname{tr}(H)$$

D'où : $\lambda_1 + \lambda_2 = r + t$.

V. Extremum global d'une fonction réelle de p variables réelles

V.1. Condition suffisante d'existence d'un extremum global (rappel)

Théorème 21.

Soit $D \subset \mathbb{R}^p$ une partie de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D.

• *f est continue sur D* • *D est une partie fermée, bornée de $\mathbb{R}^p$*	$\Rightarrow$	*f est bornée et atteint ses bornes sur D*

Autrement dit :

$$\exists\, (\overline{a}, \overline{b}) \in D \times D,\ \forall \overline{x} \in D,\ f(\overline{a}) \leqslant f(\overline{x}) \leqslant f(\overline{b})$$

V.2. Démontrer qu'une fonction réelle de p variables réelles n'admet pas extremum global

- Pour démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ n'admet pas de maximum global, il est fréquent de démontrer que la fonction f admet la limite $+\infty$ dans une direction donnée. On démontre par exemple :

  $$f(0, \ldots, 0, x_p) \underset{x_p \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  Cette direction est souvent obtenue en fixant certaines variables (en les remplaçant par 0 ou 1). Il est à noter que l'on peut faire tendre x_p vers $+\infty$ ou vers tout autre valeur qui permet d'obtenir la limite $+\infty$ pour f.
- Évidemment, lorsqu'on souhaite démontrer que f n'admet pas de minimum global, on adapte la méthode précédente en démontrant que f admet la limite $-\infty$ dans une direction donnée.

Exercice

On considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = x + 1 + 2\mathrm{e}^x$$

ainsi que la fonction f de deux variables réelles x et y définie par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x(x + y^2 + \mathrm{e}^x).$$

1) Étudier les variations de g et donner les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

2) Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de g par rapport à cette asymptote.

3) Déduire des variations de g l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $g(\alpha) = 0$ (on rappelle que $\mathrm{e} \approx 2,7$).

4) Déterminer le seul point critique de f.

5) Vérifier que f présente un extremum local β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?

6) L'extremum trouvé est-il global ?

Exercice

T est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations :

$$x \geqslant \frac{1}{4};\ y \geqslant \frac{1}{4};\ x + y \leqslant \frac{3}{4}$$

On note T' « l'intérieur de T » à savoir l'ensemble des couples (x, y) solutions du système d'inéquations :

$$x > \frac{1}{4};\ y > \frac{1}{4};\ x + y < \frac{3}{4}$$

On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que T est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Soit f la fonction définie sur T par : $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x + y}$.

1. Représenter sur un même graphique T et T'.

2. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur T.

3. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur T'.

b) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.

c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori global) sur T'.

4. ***a)*** Montrer que le minimum et le maximum de f sont atteints sur :

$$\mathscr{C} = \left\{ (x, y) \in T\ ;\ x = \frac{1}{4} \text{ ou } y = \frac{1}{4} \text{ ou } x + y = \frac{3}{4} \right\}.$$

b) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x, y) de T :

$$2 \leqslant f(x, y) \leqslant \frac{16}{3}$$

Exercice

On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = x^2 e^x - 1, \quad \text{pour tout réel } x.$$

1. Dresser le tableau de variations de ϕ en précisant la valeur de ϕ en 0 et les limites en $- + \infty$ et $+\infty$.

2. Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x > 0$, possède une unique solution, notée α, et que α appartient à l'intervalle $]1/2, 1[$.

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et la fonction g définie sur U par

$$g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y, \quad \text{pour tout } (x, y) \text{ dand } U.$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U.

2. Calculer les dérivées premières de g sur U.

3. Montrer que g admet deux, et seulement deux, points critiques qui sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$.

4. Est-ce g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

5. Est-ce g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

6. Est-ce g admet un extremum global sur U ?