# CH XII : Couples de variables aléatoires discrètes

Rappelons que si $X$ est une v.a. discrète, l'ensemble $X(\Omega)$ peut se noter sous la forme :

$$X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\} \quad \text{où } I \subset \mathbb{N}$$

*(par définition, $X(\Omega)$ est un ensemble au plus dénombrable)*

## I. Lois associées à un couple de v.a. discrètes

### I.1. Loi d'un couple de v.a. discrètes

#### I.1.a) Définition de la notion de couple de v.a. discrètes

**Définition**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles *(on considère souvent $E = \mathbb{K}$ et $F = \mathbb{K}$)*.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- On dit que $X$ est une **variable aléatoire discrètes à valeurs dans** $E$ et définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  - ***(i)*** $X$ est une application de $\Omega$ dans $E$ ($X : \Omega \to E$).
  - ***(ii)*** $\forall x \in E,\ X^{-1}\big(\{x\}\big) = \{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$.
  - ***(iii)*** L'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

    *(l'ensemble image $X(\Omega)$ est, par définition, l'ensemble des valeurs prise par l'application $X$)*
- On dit qu'une variable aléatoire $Z$ est **couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans** $E \times F$ et définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  - × $Z$ s'écrit sous la forme $Z = (X, Y)$,
  - × $X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E$,
    $Y$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $F$.
- En particulier, un couple de variable aléatoires discrètes est une variable aléatoire discrète à valeur dans un produit.

$$\begin{array}{rcccc} Z : \Omega & \to & E & \times & F \\ \omega & \mapsto & \big(X(\omega) & , & Y(\omega)\big) \end{array}$$

**Exemple**

***1)*** On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.
- On note $X$ la v.a. égale au plus petit des deux résultats obtenus.
- On note $Y$ la v.a. égale au plus grand des deux résultats obtenus.

Alors, $(X, Y)$ est un couple de v.a. discrètes.

***2)*** Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules vertes et 5 boules bleues. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.
- On note $X$ la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenues.
- On note $Y$ la v.a. égale au nombre de boules vertes obtenues.

Alors, $(X, Y)$ est un couple de v.a. discrètes.

***3)*** On lance indéfiniment une pièce non équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{3}{4}$ (et celle d'obtenir Face vaut donc $\frac{1}{4}$).
On appelle chaîne toute séquence constituée uniquement de Pile ou uniquement de Face.
- On note $X$ la v.a. égale à longueur de la première chaîne obtenue.
- On note $Y$ la v.a. égale à la longueur de la deuxième chaîne.

Alors, $(X, Y)$ est un couple de v.a. discrètes.
*(par exemple, si $\omega = PPPPFFP\ldots$, $X(\omega) = 4$ et $Y(\omega) = 2$)*

***4)*** On dispose d'une pièce de monnaie et d'une urne contenant en tout $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$) dont $n$ sont blanches et $n$ sont noires. L'expérience aléatoire consiste à lancer la pièce jusqu'à obtenir le premier pile. Puis à effectuer autant de tirages avec remise dans l'urne que de lancers effectués pour obtenir Pile.
- On note $X$ la v.a. égale au nombre de lancers de pièce effectués.
- On note $Y$ la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenues lors des tirages.

Alors, $(X, Y)$ est un couple de v.a. discrètes.

**Remarque**

- On peut définir de la même manière la notion de triplet de variables aléatoires discrètes (c'est une variable aléatoire $Z$ qui s'écrit sous la forme $Z = (X_1, X_2, X_3)$).
- De manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir la notion de $n$-uplet de variables aléatoires discrètes. Un $n$-uplet de variables aléatoires discrètes est une variable aléatoire $Z = (X_1, \dots, X_n)$ où les variables aléatoires $X_1$, ..., $X_n$ sont discrètes.

### I.1.b) Loi d'un couple de v.a. discrètes

**Définition**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes.

- On appelle **loi de probabilité du couple** $(X, Y)$ ou **loi conjointe des v.a.** $X$ **et** $Y$, la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)$ pour $x$ décrivant $X(\Omega)$ et $y$ décrivant $Y(\Omega)$ (c'est-à-dire $(x, y)$ décrivant $X(\Omega) \times Y(\Omega)$).

  Autrement dit, la loi de $X$ est la famille :

$$\Big(\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)\Big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

- On note au passage que l'événement $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$ peut aussi s'écrire :
  × $\{X = x, Y = y\}$.
  × $\{(X, Y) = (x, y)\}$.

**Remarque**

- On peut généraliser cette définition au cas des triplets ou des $n$-uplets de variables aléatoires discrètes. La loi de $Z = (X_1, \dots, X_n)$ est la famille :

$$\Big(\mathbb{P}\big(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}\big)\Big)_{(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)}$$

- Dans le cas d'un couple $(X, Y)$ constitué de deux v.a. $X$ et $Y$ finies, on peut représenter la loi de $(X, Y)$ sous forme d'un tableau à double entrée.

**Exemple**

***1)*** On reprend l'exemple ***1)*** qui décrit deux lancers d'un dé à 6 faces.

× $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. Ainsi, $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}([\![1, 6]\!]^2) = 6 \times 6 = 36$.

× $\Omega$ est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
*($(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé)*

On a donc :

$$\forall A \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{36}$$

- Déterminons la loi de $(X, Y)$.
  Tout d'abord : $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.
- Soit $i \in [\![1, 6]\!]$ et soit $j \in [\![1, 6]\!]$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | L'événément $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$ est réalisé | | |
| $\Leftrightarrow$ | L'événément $\{X = i\}$ est réalisé | et | l'événement $\{Y = j\}$ est réalisé |
| $\Leftrightarrow$ | Le plus petit des 2 résultats obtenus vaut $i$ | et | le plus grand des 2 résultats obtenus vaut $j$ |

Trois cas se présentent.

× Si $i > j$, alors :

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \varnothing$$

En effet, le plus petit des deux résultats ne peut être strictement plus grand que le plus grand.

× Si $i < j$, alors :

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \{(i, j), (j, i)\}$$

*(cet événement est réalisé par deux 2-tirages : celui où le 1^er^ résultat vaut i et le suivant j et celui où le premier résultat vaut j et le suivant i)*

× Si $i = j$, alors :

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \{(i, i)\}$$

*(cet événement est réalisé par un unique 2-tirages : le 1^er^ lancer donne $i$ et le deuxième aussi)*

- On en conclut :

$$\forall (i,j) \in [\![1,6]\!]^2,\ \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \begin{cases} \frac{0}{36} & \text{si } i > j \\ \frac{2}{36} & \text{si } i < j \\ \frac{1}{36} & \text{si } i = j \end{cases}$$

- Ce résultat peut aussi être présenté sous forme de tableau.

| $x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ |

*2)* On reprend maintenant le deuxième exemple.
On note $B = \{b_1, \dots, b_{12}\}$ l'ensemble de boules de l'urne.
(les boules $b_1$, …, $b_3$ sont blanches, les boules $b_4$, …, $b_7$ sont vertes et les boules $b_8$, …, $b_{12}$ sont bleues)

× $\Omega$ est l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble $B$.
Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \binom{12}{3} = 220$.

× $\Omega$ est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
*($(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé)*

On a donc :

$$\forall A \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A)}{220}$$

- Déterminons la loi de $(X, Y)$.
Tout d'abord : $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,3]\!]$.
- Soit $i \in [\![0,3]\!]$ et soit $j \in [\![0,3]\!]$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | L'événement $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$ est réalisé | | |
| $\Leftrightarrow$ | L'événement $\{X = i\}$ est réalisé | et | l'événement $\{Y = j\}$ est réalisé |
| $\Leftrightarrow$ | Le 3-tirage contient $i$ boules blanches | et | le 3-tirage contient $j$ boules vertes |

Un 3-tirage réalisant $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$ est entièrement déterminé par :

× les numéros des $i$ boules blanches tirées : $\binom{3}{i}$ possibilités.

× les numéros des $j$ boules vertes tirées : $\binom{4}{j}$ possibilités.

× les numéros des boules ni blanches, ni vertes tirées : $\binom{5}{3-i-j}$ possibilités.
*(ce sont forcément des boules bleues)*

- On en conclut :

$$\forall (i,j) \in [\![0,3]\!]^2,\ \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{5}{3-i-j}}{\binom{12}{3}}$$

- Ce résultat peut aussi être représenté sous forme de tableau.

| $x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{10}{220}$ | $\frac{40}{220}$ | $\frac{30}{220}$ | $\frac{4}{220}$ |
| 1 | $\frac{30}{220}$ | $\frac{60}{220}$ | $\frac{18}{220}$ | 0 |
| 2 | $\frac{15}{220}$ | $\frac{12}{220}$ | 0 | 0 |
| 3 | $\frac{1}{220}$ | 0 | 0 | 0 |

**Remarque**
De ces premières études, on peut tirer plusieurs remarques.

- Afin de déterminer la loi d'un couple $(X, Y)$, on commence `TOUJOURS` par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- Il est fréquent d'avoir à réaliser une disjonction de cas lorsque l'on détermine la loi d'un couple de v.a. .
- Si l'on somme tous les éléments du tableau, on obtient 1.
  *(c'est une mesure de vérification !)*
  Ceci provient du fait que $\left( \{X = x\} \cap \{Y = y\} \right)_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est **le système complet d'événements associé au couple** $(X, Y)$.

### I.1.c) Système complet d'événements associé à un couple de v.a. discrètes

**Définition**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes.

- On appelle **le système complet d'événements associé au couple** $(X, Y)$ la famille :

$$\left( \{X = x\} \cap \{Y = y\} \right)_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$$

- Cette famille est un système complet d'événements. En particulier :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}\big( \{X = x\} \cap \{Y = y\} \big) \\
= & \sum_{x \in X(\Omega)} \Big( \sum_{y \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \Big) \\
= & \sum_{y \in X(\Omega)} \Big( \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \Big) \ = \ 1
\end{aligned}$$

*Démonstration.*

***1)*** Démontrons que cette famille est constituée d'événements 2 à 2 incompatibles. Choisissons deux événements distincts de cette famille.
Soit $(x_1, y_1) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et $(x_2, y_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tels que :

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
& \big( \{X = x_1\} \cap \{Y = y_1\} \big) \cap \big( \{X = x_2\} \cap \{Y = y_2\} \big) \\
= & \big( \{X = x_1\} \cap \{X = x_2\} \big) \cap \big( \{Y = y_1\} \cap \{Y = y_2\} \big) \\
= & \varnothing
\end{aligned}$$

En effet, on a forcément $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$ car $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

*2)* Démontrons que la réunion de ces événements est $\Omega$.

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \{X = x\} \cap \{Y = y\} \\
= &\bigcup_{x\in X(\Omega)} \left( \bigcup_{y\in Y(\Omega)} \{X = x\} \cap \{Y = y\} \right) \\
= &\bigcup_{x\in X(\Omega)} \left( \{X = x\} \cap \left( \bigcup_{y\in Y(\Omega)} \{Y = y\} \right) \right) && \textit{(car } \cap \textit{ est distributive par rapport à } \cup\textit{)} \\
= &\bigcup_{x\in X(\Omega)} \left( \{X = x\} \cap \Omega \right) && \textit{(car } (\{Y = y\})_{y\in Y(\Omega)} \textit{ est un sce)} \\
= &\bigcup_{x\in X(\Omega)} \{X = x\} \ = \ \Omega && \textit{(car } (\{X = x\})_{x\in X(\Omega)} \textit{ est un sce)}
\end{aligned}$$

On en déduit notamment :

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \\
= &\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \\
= &\ \mathbb{P}\Big( \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \{X = x\} \cap \{Y = y\} \Big) \\
= &\ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1
\end{aligned}$$

□

**Remarque**

- On souligne que cette démonstration est valable dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis mais aussi dans le cas où ils sont infinis (dénombrables). Cela implique alors que les sommes considérées sont infinies.
- On définit de la même manière le système complet d'événements associé à un $n$-uplet $Z = (X_1, \dots, X_n)$. C'est la famille :

$$\Big( \{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\} \Big)_{(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)}$$

## I.2. Lois conditionnelles

**Définition**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes.

*1)* • Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(\{Y = y\}) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de $X$ sachant (que l'événement)** $\{Y = y\}$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big(\{X = x\}\big) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big)} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de $X$ sachant $\{Y = y\}$ est la donnée la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\})$ pour $x$ décrivant $X(\Omega)$. Ou encore, la loi conditionnelle de $X$ sachant l'événement $\{Y = y\}$ est la famille :

$$\Big( \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big(\{X = x\}\big) \Big)_{x\in X(\Omega)}$$

*2)* • Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de $Y$ sachant (que l'événement)** $\{X = x\}$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\}) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{\mathbb{P}(\{X = x\})} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = x\}$ est la donnée la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$ pour $y$ décrivant $Y(\Omega)$. Ou encore, la loi conditionnelle de $Y$ sachant l'événement $\{X = x\}$ est la famille :

$$\Big( \mathbb{P}_{\{X=x\}}\big(\{Y = y\}\big) \Big)_{y\in Y(\Omega)}$$

**Remarque**
Soit $x_0 \in X(\Omega)$ tel que : $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\}\big) \neq 0$.

Par définition : $\mathbb{P}_{\{X=x_0\}}(\{Y = y\}) \;=\; \dfrac{\mathbb{P}\big(\{X = x_0\} \cap \{Y = y\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X = x_0\}\big)}$

- Ainsi, si on connaît :
  - × les valeurs $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\} \cap \{Y = y\}\big)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$,
  *(c'est notamment le cas si on connaît la loi du couple $(X, Y)$)*
  - × la valeur de $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\}\big)$,
  *(c'est notamment le cas si on connaît la loi de $X$)*

  alors on obtient la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = x_0\}$.
- On peut aussi lire l'égalité dans l'autre sens. Si on connaît :
  - × la valeur $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\}\big)$,
  - × les valeurs $\mathbb{P}_{\{X=x_0\}}\big(\{Y = y\}\big)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$,
  *(c'est-à-dire la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = x_0\}$)*

  alors on obtient les valeurs $\mathbb{P}\big(\{X = x_0\} \cap \{Y = y\}\big)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.

**Exercice**

Soit $X$ et $Y$ deux v.a. indépendantes.

On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Reconnaître la loi de $X$ sachant $\{X + Y = n\}$.

*Démonstration.*

- Les v.a. $X$ et $Y$ étant indépendantes, $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
  On en déduit : $\mathbb{P}\big(\{X + Y = n\}\big) \;=\; \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \dfrac{(\lambda + \mu)^n}{n!} \neq 0$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\{X+Y=n\}}(\{X = k\}) &= \frac{\mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{X + Y = n\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X + Y = n\}\big)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Y = n - k\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X + Y = n\}\big)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\, \mathbb{P}\big(\{Y = n - k\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X + Y = n\}\big)} \quad \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

× Si $k > n$ : alors $\{Y = n - k\} = \varnothing$. Et donc $\mathbb{P}_{\{X+Y=n\}}(\{X = k\}) = 0$.

× Si $k \leqslant n$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\{X+Y=n\}}(\{X = k\}) &= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\, \mathrm{e}^{\lambda+\mu} \frac{n!}{(\lambda+\mu)^n} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \, \frac{\lambda^k\, \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^k\, (\lambda+\mu)^{n-k}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

On reconnaît la loi binomiale de paramètre $(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$. □

## I.3. Lois marginales

### I.3.a) Définition

**Définition**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes.

- On appelle $1^{\text{ère}}$ **loi marginale du couple** $(X, Y)$ la loi de la v.a. $X$.
- On appelle $2^{\text{ème}}$ **loi marginale du couple** $(X, Y)$ la loi de la v.a. $Y$.

**Remarque**

- L'expression « loi marginale » n'a de sens que dans un contexte d'étude d'un couple de v.a. $(X, Y)$. Aux concours, cette expression ne sera pas forcément utilisée, même dans les sujets sur les couples. On parlera alors tout simplement de loi de $X$ (resp. $Y$) en lieu et place de $1^{\text{ère}}$ (resp. $2^{\text{ème}}$) loi marginale du couple $(X, Y)$.
- De même, on peut définir la $i^{\text{ème}}$ loi marginale (pour $i \in [\![1, n]\!]$) d'un $n$-uplet de variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$.

### I.3.b) Détermination en pratique des lois marginales

**Théorème 1.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes.*

***1)*** *Loi de $X$ via la loi du couple $(X, Y)$*

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \ = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)}$$

*Loi de $X$ via les lois conditionnelles de $X$ sachant $\{Y = y\}$ pour tout $y \in Y(\Omega)$ :*

*On suppose : $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \ = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big)\ \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\})}$$

***2)*** *Loi de $Y$ via la loi du couple $(X, Y)$*

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \ = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{Y = y\} \cap \{X = x\}\big)}$$

*Loi de $Y$ via les lois conditionnelles de $Y$ sachant $\{X = x\}$ pour tout $x \in X(\Omega)$ :*

*On suppose : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \ = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\ \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})}$$

*Démonstration.*

- Les v.a. $X$ et $Y$ jouent des rôles analogues.
  Ainsi, les démonstrations des points ***1)*** et ***2)*** sont similaires.
  Démontrons le point ***1)***.
- La famille $\big(\{Y=y\}\big)_{y\in Y(\Omega)}$ est un sce.
  Soit $x \in X(\Omega)$. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big(\{X=x\}\big) \;=\; \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big)$$

- Si on sait de plus : $\forall y\in Y(\Omega),\ \mathbb{P}\big(\{Y=y\}\big)\neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\{Y=y\}\big)\times \mathbb{P}_{\{Y=y\}}\big(\{X=x\}\big)$$ □

**Remarque**

- On retiendra que pour obtenir une loi marginale à partir de la loi du couple ou d'une loi conditionnelle, il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales.
- Cela permet de construire des énoncés du type :
  ***1)*** Reconnaître la loi de $X$.
  ***2)*** Déterminer la loi du couple $(X,Y)$ *(si l'énoncé a un parti-pris couple).*

  OU

  Pour tout $x\in X(\Omega)$, déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X=x\}$ *(si l'énoncé a un parti-pris couple).*
  ***3)*** Déterminer la loi de $Y$.
- Rappelons enfin que les sommes présentes dans la formule des probabilités totales peuvent être infinies. C'est le cas si les ensembles images des v.a. considérées sont infinies. Les écritures restent vraies sans ajout d'autre hypothèse.

**Exemple**
Lorsque les v.a. $X$ et $Y$ sont finies, la formule :

$$\forall x\in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big(\{X=x\}\big) \;=\; \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X=x\}\cap\{Y=y\}\big)$$

peut se lire sur le tableau de la loi du couple $(X,Y)$.
Reprenons l'exemple du double lancer de dé 6.

| $y\in Y(\Omega)$ / $x\in X(\Omega)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Loi de X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{9}{36}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{7}{36}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{5}{36}$ |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| Loi de $Y$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{11}{36}$ | 1 |

Si $x=1$, alors la formule se lit : $\mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) \;=\; \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}\big(\{X=1\}\cap\{Y=j\}\big)$.

Ainsi, on obtient $\mathbb{P}\big(\{X=1\}\big)$ en sommant tous les éléments de la première ligne. De manière générale, on obtient $\mathbb{P}\big(\{X=i\}\big)$ en sommant tous les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne.

**Exercice**
On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in ]0,1[$ et face avec probabilité $q = 1-p$. On note $X$ le rang d'apparition du premier pile et $Y$ le rang d'apparition du deuxième pile.
Les lancers sont considérés indépendants.

*1.* Déterminer la loi de $X$.

*2.* Parti-pris couple :
Déterminer la loi du couple $(X,Y)$.
Parti-pris lois conditionnelles :
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = i\}$.

*3.* En déduire la loi de $Y$.

*4.* Que vaut $\sum\limits_{j=2}^{+\infty} \left( \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big) \right)$ ?
Retrouver ce résultat par calcul.

*5.* Parti-pris lois conditionnelles :
Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\sum\limits_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\})$ ?
Retrouver ce résultat par calcul.

*Démonstration.*

*1.*
- L'expérience consiste ici en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) indépendantes et de même paramètre de succès $p$ (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a. $X$ est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \sim \mathcal{G}(p).}$$

*2.* Parti-pris couple.

- Tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
En effet, le premier Pile peut apparaître dès le premier tirage ; le deuxième apparaît au mieux lors du deuxième tirage.

- Déterminons la loi du couple $(X,Y)$.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | L'événement $\{X=i\} \cap \{Y=j\}$ est réalisé | | |
| $\Leftrightarrow$ | L'événement $\{X=i\}$ est réalisé | et | l'événement $\{Y=j\}$ est réalisé |
| $\Leftrightarrow$ | Le $1^{\text{er}}$ Pile est obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage | et | le $2^{\text{ème}}$ Pile est obtenu au $j^{\text{ème}}$ tirage |

Deux cas se présentent.
× Si $i \geqslant j$, alors :
$$\{X=i\} \cap \{Y=j\} \ = \ \varnothing$$
En effet, le premier pile ne peut apparaître après le deuxième.
Ainsi : $\mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
× Si $i < j$, alors :
$$\{X=i\} \cap \{Y=j\} \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \ldots \cap F_{j-1} \cap P_j$$
Par indépendance des lancers, on a alors :
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big) \\ = \ & \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_{i-1}) \times \mathbb{P}(P_i) \times \mathbb{P}(F_{i+1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_{j-1}) \times \mathbb{P}(P_j) \\ = \ & q^{i-1}\ p\ q^{j-i-1}\ p \\ = \ & q^{j-2}\ p^2 \end{aligned}$$

Parti-pris lois conditionnelles.

- Tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
En effet, le premier Pile peut apparaître dès le premier tirage ; le deuxième apparaît au mieux lors du deuxième tirage.

- Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Déterminons la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = i\}$. Deux cas se présentent.
  × Si $j \leqslant i$, alors :
  $$\mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y = j\}) = \frac{\mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X = i\}\big)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}\big(\{X = i\}\big)} = 0$$
  En effet, le premier pile ne peut apparaître après le deuxième.
  × Si $j > i$ :
    - Si $\{X = i\}$ est réalisé, c'est que le premier Pile apparaît lors du $i^{\text{ème}}$ tirage. Dans ce cas, l'événement $\{Y = j\}$ est réalisé si et seulement si le deuxième Pile apparaît lors du $j^{\text{ème}}$ tirage.
    - Après ces $i$ premiers tirages, l'expérience consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) indépendantes et de même paramètre de succès $p$ (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
    - La loi conditionnelle de $Y$ sachant (que l'événement) $\{X = i\}$ (est réalisé) est celle d'une v.a. $i + T$ où $T \sim \mathcal{G}(p)$. En effet, le rang d'apparition du deuxième Pile est donné par le nombre $i$ de tirages effectués dans l'expérience initiale auquel on ajoute au rang d'apparition du premier Pile (donné par $T$) dans l' expérience débutant après ces $i$ tirages.

  Ainsi, pour tout $j > i$ :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\{X=i\}}\big(\{Y = j\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{i + T = j\}\big)\\ &= \mathbb{P}\big(\{T = j - i\}\big) = q^{j-i-1}\, p\end{aligned}$$

**Remarque**

- Généralement, la loi conditionnelle à déterminer est une loi usuelle (*cf* exercice suivant). Le parti-pris lois conditionnelles ne semble pas forcément pertinent ici puisque la loi conditionnelle n'est pas directement une loi usuelle mais la loi d'une transformée affine d'une loi usuelle.
- On pouvait rédiger en revenant à la loi de couple en écrivant :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y = j\}) &= \frac{\mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{X = i\}\big)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \ldots \cap F_{j-1} \cap P_j)}{\mathbb{P}(F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i)}\\ &= \ldots \qquad \textit{(par indépendance des lancers)}\\ &= \frac{q^{i-1}\, p\; q^{j-i-1}\, p}{q^{i-1}\, p} = q^{j-i-1}\, p\end{aligned}$$
  Dans ce cas, il serait préférable que l'exercice soit présenté avec un parti-pris couple.

*3.* La famille $(\{X = i\})_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un sce.
Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. D'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\big(\{Y = j\}\big)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big)\\ &= \sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) + \cancel{\sum_{\substack{i=1\\ i\geqslant j}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big)}\\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big)\end{aligned}$$

Parti-pris couple.
$$\sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \sum_{i=1}^{j-1} q^{j-2}\, p^2 = (j-1)\, q^{j-2}\, p^2$$

Parti-pris lois conditionnelles.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big) &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big(\{X=i\}\big)\, \mathbb{P}_{\{X=i\}}\big(\{Y=j\}\big) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} q^{i-1}\, p\, q^{j-i-1}\, p \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} q^{j-2}\, p^2 = (j-1)\, q^{j-2}\, p^2\end{aligned}$$

*4.* • $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big)\right) = 1$. En effet :

$$\begin{aligned}&\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big)\right) \\ &= \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}}} \mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}}} \{X=i\} \cap \{Y=j\}\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1\end{aligned}$$

car la famille $\Big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\Big)_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}}}$ forme un sce.

• On peut retrouver ce résultat par calcul.

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\big)\right) &= \sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y=j\}\big) \\ &= \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1)\, q^{j-2}\, p^2 = p^2 \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1)\, q^{j-2} \\ &= p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j\, q^{j-1} = p^2\, \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1\end{aligned}$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison $q$.

*5.* • Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\}) = 1$.

En effet :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\}) = \mathbb{P}_{\{X=i\}}\Big(\bigcup_{j=2}^{+\infty} \{Y=j\}\Big) = \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\Omega) = 1$$

car la famille $(\{Y=j\})_{j \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ forme un sce.

• On peut retrouver ce résultat par calcul.

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\}) &= \cancel{\sum_{j=2}^{i} \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\})} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\}) \\ &= \sum_{j=i+1}^{+\infty} q^{j-i-1}\, p = p \sum_{j=i+1}^{+\infty} q^{j-i-1} \\ &= p \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = p\, \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1\end{aligned}$$

□

**Exercice**

Deux joueurs $A$ et $B$ procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $p$ ($p$ fixé, $p \in ]0,1[$), et celle d'obtenir face est $q = 1-p$.
Le joueur $A$ commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur $A$.
Le joueur $B$ effectue alors autant de lancers que le joueur $A$ et on note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur $B$.

*1.* Rappeler la loi de $X$ et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X=k\}$.

*2.* Quelles sont les valeurs prises par $Y$ ?

*3.* Montrer : $\displaystyle\mathbb{P}\big(\{Y=0\}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$.

*4.* Soit $n$ un entier naturel non nul.
Montrer : $\displaystyle\mathbb{P}\big(\{Y=n\}\big) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.

***5.*** On admet : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in ]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k-1}{m-1} x^k = \frac{x^m}{(1-x)^m}$.

Montrer : $\mathbb{P}\big(\{Y = n\}\big) = \dfrac{1}{(1+q)^2}\left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

***1.*** Rappeler la loi de $X$ et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = k\}$.

*Démonstration.*

- L'expérience consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) indépendantes et de même paramètre de succès $p$ (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a. $X$ est le rang d'apparition du premier succès.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \sim \mathcal{G}(p).}$$

- Soit $k \geqslant 1$. Déterminons la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = k\}$.
  - Si $\{X = k\}$ est réalisé, c'est que le premier Pile a été obtenu lors du $k^{\text{ème}}$ lancer. Dans ce cas, le joueur $B$ procède alors à $k$ lancers de pièces.
  - Cette expérience consiste en la répétition de $k$ épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) indépendantes, de même paramètre de succès $p$ (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
  - La v.a. $Y$ compte le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

  Ainsi, la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = k\}$ est la loi binomiale de paramètre $(k, p)$.

$$\boxed{\begin{gathered}\forall i \in [\![0,k]\!],\ \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = \binom{k}{i} p^i\ (1-p)^{k-i} \\ \forall i \geqslant k+1,\ \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = i\}) = 0\end{gathered}}$$

**Remarque**

On comprend dans cette question tout l'intérêt des lois conditionnelles : on effectue d'abord une expérience initiale dont le résultat définit l'expérience qui va suivre. La v.a. $X$ dépend du résultat de l'expérience initiale. La v.a. $Y$ dépend du résultat de la deuxième expérience (qui dépend elle-même de la $1^{\text{ère}}$). Il est donc logique de vouloir déterminer la loi de la v.a. $Y$ connaissant le résultat de l'expérience initiale. □

***2.*** Quelles sont les valeurs prises par $Y$ ?

*Démonstration.*

- On a vu dans la question précédente que si $\{X = k\}$ est réalisé alors $Y$ peut prendre toutes les valeurs de $[\![0,k]\!]$.
- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors $X$ peut prendre toutes les valeurs $k \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit que $Y$ peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

**Remarque**

On peut faire cette démonstration en revenant une nouvelle fois à l'expérience réalisée :

× pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le joueur $B$ peut obtenir $i$ piles. Cela est notamment réalisé si le joueur $A$ a obtenu le premier pile lors de son $i^{\text{ème}}$ lancer et si le joueur $B$ n'a obtenu que des piles lors de ses lancers.

× le joueur $B$ peut aussi obtenir 0 pile et ce quel que soit le nombre de tirages dont il dispose.

□

*3.* Montrer : $\mathbb{P}\big(\{Y=0\}\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}$.

*Démonstration.*
La famille $\big(\{X=k\}\big)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Y=0\}\big) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\cap\{Y=0\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\times \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=0\}) && \textit{(valide car } \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\, p\times \binom{k}{0}\, p^0\, (1-p)^{k-0} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-1}\, p \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{2k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} \;=\; p\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2(k+1)-1} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k+1} \;=\; pq\sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k \\
&= pq\,\frac{1}{1-q^2} && \textit{(car } q^2\in\,]-1,1[\textit{)} \\
&= \cancel{p}\, q\,\frac{1}{\cancel{(1-q)}\,(1+q)} \;=\; \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Y=0\}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}}$$

□

*4.* Soit $n$ un entier naturel non nul.
Montrer : $\mathbb{P}\big(\{Y=n\}\big) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dbinom{k}{n} p^{n+1}q^{2k-n-1}$.

*Démonstration.*

- La famille $\big(\{X=k\}\big)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\{Y=n\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\cap\{Y=n\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\times \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=n\}) && \textit{(valide car } \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\neq 0\textit{)} \\
&= \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\times \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=n\})} && \textit{(car pour tout } k<n,\ \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=n\})=0\textit{)} \\
&\quad + \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\times \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=n\}) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\times \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=n\}) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\, p\, \binom{k}{n}\, p^n\, (1-p)^{k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}\, p^{n+1}\, (1-p)^{2k-n-1} \\
&= \frac{p^{n+1}}{(1-p)^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}\, (1-p)^{2k} \;=\; \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Y=n\}\big) = \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k}$$

□

***5.*** On admet : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \,]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k-1}{m-1} x^k = \frac{x^m}{(1-x)^m}$.

Montrer : $\mathbb{P}\big(\{Y=n\}\big) = \dfrac{1}{(1+q)^2} \left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\big(\{Y=n\}\big) = \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k$$

- Or, par décalage d'indice :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^{k-1} = \frac{1}{q^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^k$$

- En appliquant la formule fournie par l'énoncé à $m = n+1 \in \mathbb{N}^*$, et $x = q^2 \in \,]0,1[$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^{k-1} = \frac{\left(q^2\right)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}}$$

- En combinant tous les résultats obtenus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Y=n\}\big) &= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \frac{1}{q^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^k \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \frac{1}{q^2} \frac{\left(q^2\right)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{q^2} \left(\frac{q^2}{q}\right)^{n+1} p^{n+1} \frac{1}{(1-q)^{n+1}\,(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{q^2}\, q^{n+1}\, \cancel{p^{n+1}} \frac{1}{\cancel{p^{n+1}}\,(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} = \frac{1}{(1+q)^2} \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n-1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{Y=n\}\big) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}.}$$

□

# II. Indépendance de variables aléatoires discrètes

## II.1. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

### Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes.

- Les **v.a. $X$ et $Y$ sont indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et tout $B \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants.
- De manière équivalente, les **v.a. $X$ et $Y$ sont indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, c'est-à-dire si :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega), \\ \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \end{array}}$$

- On note $X \perp\!\!\!\perp Y$ pour signifier que les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes.

### Remarque

- Dans les énoncés, on trouvera souvent la question :
« les v.a. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ? ».
Ainsi énoncée, cette question attend généralement la réponse : `NON`.
- Il s'agit alors de démontrer la négation de la propriété d'indépendance. Or :

$$\begin{array}{l} \texttt{NON}(\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big)) \\ \Leftrightarrow\ \exists x \in X(\Omega), \exists y \in Y(\Omega), \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \neq \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \end{array}$$

On en déduit la méthodologie suivante.

`MÉTHODO` **Démontrer que deux v.a. discrètes ne sont pas indépendantes**

- Pour démontrer que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \ \neq \ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big)$$

- Souvent, on essaiera de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \neq 0,\ \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \neq 0$$

### Exemple

*1)* Reprenons l'expérience aléatoire consistant à tirer 3 boules dans une urne contenant 3 boules blanches, 4 vertes et 5 bleues. Alors :

$$\mathbb{P}\big(\{X = 3\} \cap \{Y = 3\}\big) \ = \ 0 \ \neq \ \underbrace{\mathbb{P}\big(\{X = 3\}\big)}_{\neq 0} \times \underbrace{\mathbb{P}\big(\{Y = 3\}\big)}_{\neq 0}$$

Ainsi, $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

*2)* Si on reprend l'exemple du lancer de pièces avec $X$ le rang d'apparition du premier pile et $Y$ le rang d'apparition du deuxième pile, alors :

$$\mathbb{P}\big(\{X = 2\} \cap \{Y = 1\}\big) \ = \ 0 \ \neq \ \underbrace{\mathbb{P}\big(\{X = 2\}\big)}_{\neq 0} \times \underbrace{\mathbb{P}\big(\{Y = 1\}\big)}_{\neq 0}$$

Ainsi, $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

**Remarque**

Soient $X$ et $Y$ sont deux v.a. discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable $X$ est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable $Y$.
Plus précisément, pour tout $x \in X(\Omega)$, pour tout $y \in Y(\Omega)$ :

- $\mathbb{P}\left(\{X = x\} \cap \{Y \leqslant y\}\right) = \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant y\}\big)$,
- $\mathbb{P}\left(\{X \leqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\}\right) = \mathbb{P}\big(\{X \leqslant x\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant y\}\big)$,
- $\mathbb{P}\left(\{X \leqslant x\} \cap \{Y > y\}\right) = \mathbb{P}\big(\{X \leqslant x\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{Y > y\}\big)$,
- $\mathbb{P}\left(\{X > x\} \cap \{Y < y\})\right) = \mathbb{P}(\{X > x\} \times \mathbb{P}\big(\{Y < y\}\big)$,
- $\dots$

Cela provient essentiellement du fait que :

$$\{Y \leqslant y\} = \bigcup_{\substack{y_j \in Y(\Omega) \\ y_j \leqslant y}} \{Y = y_j\}$$

et que $\{X = x\}$ est indépendant de tout événement $\{Y = y_j\}$.

**Théorème 2.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes.*

***1)*** *Supposons : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rl} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\}) \ = \ \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \end{array}}$$

***2)*** *Supposons : $\forall y \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rl} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(\{X = x\}) \ = \ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \end{array}}$$

## II.2. Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

**Définition**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ (avec $n \geqslant 2$) des v.a. discrètes.

- Les v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \\ \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right) \ = \ \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_i = x_i\}\big) \end{array}}$$

- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables (mutuellement) indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

$$\forall n \geqslant 2, \text{ les variables } X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n \text{ sont mutuellement indépendantes}$$

ou, de manière équivalente, si pour tout $J$ partie **finie** de $\mathbb{N}^*$ ($J \subset \mathbb{N}^*$) :

$$\forall (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j(\Omega),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} \{X_j = x_j\}\right) \ = \ \prod_{j\in J} \mathbb{P}\big(\{X_j = x_j\}\big)$$

- On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) si :
  - × les variables de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes,
  - × les variables de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont toutes de même loi.

**Remarque**
Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a. discrètes mutuellement indépendantes.
Alors toute famille de $n$ événements dont chacun est construit à l'aide d'une v.a. $X_i$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
Plus précisément, pour tout $x_1 \in X_1(\Omega)$, …, $x_n \in X_n(\Omega)$ :

- × les événements $\{X_1 = x_1\}, \{X_2 \leqslant x_2\}, \dots \{X_n \leqslant x_n\}$ sont mutuellement indépendants,
- × les événements $\{X_1 \leqslant x_1\}, \{X_2 > x_2\}, \dots \{X_n \leqslant x_n\}$ sont mutuellement indépendants,
- × …

**Théorème 3** (Lemme des coalitions)**.**
*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*
*Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes à valeurs dans un ensemble $E$.*
*Soit $F$ un ensemble.*
*Soient $f : X(\Omega) \to F$ et $g : Y(\Omega) \to F$ deux fonctions.*

- *Cas de 2 v.a.*

$$\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y \;\Rightarrow\; f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)}$$

- *Généralisation à $n$ v.a.*
*Soient $X_1$, …, $X_n$ des v.a. discrètes.*
*Soient $f_1 : X_1(\Omega) \to F$, …, $f_n : X_n(\Omega) \to F$ des fonctions.*

| | | |
|---|---|---|
| *Les v.a. discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes* | $\Rightarrow$ | *Les v.a. discrètes $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes* |

| | | |
|---|---|---|
| *Les v.a. discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes* | $\Rightarrow$ | *Toute v.a. s'exprimant en fonction des v.a. $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute v.a. s'exprimant en fonction des v.a. $X_{p+1}, \dots, X_n$ (pour $p \in [\![2, n-1]\!]$)* |

**Remarque**

- Le lemme des coalitions ne sert qu'à une chose : démontrer que des variables aléatoires sont indépendantes. Outre le retour à la définition (méthode fastidieuse) c'est le seul outil dont on dispose pour démontrer que des variables aléatoires sont indépendantes.
- Il ne sert à rien de retenir l'énoncé de manière très formelle. Ce qu'il convient de retenir c'est que toute variable aléatoire $X$ construite à l'aide de certaines variables aléatoires est indépendante de toute variable aléatoire $Y$ construite à l'aide de variables aléatoires qui sont indépendantes de celles utilisées pour définir $X$.

**Exemple**

- Soient $X_1, \dots, X_5$ des v.a. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :
  - × les v.a. $X_1$, ${X_2}^2$, $2\,X_3$, $\mathrm{e}^{X_4} - 1$ et $|X_5|$ sont mutuellement indépendantes.
  - × les v.a. $2\,X_1X_3 - X_5$ et ${X_2}^2$ sont indépendantes.
  - × les v.a. $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_3, X_4, X_5)$ sont indépendantes.
- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $X_{n+1}$ sont indépendantes.
- Si $X^2$ et $Y^2$ ne sont pas indépendantes, alors, en procédant par l'absurde, on démontre que $X$ et $Y$ ne le sont pas non plus.

# III. Opérations sur les v.a. discrètes

Dans cette section, on étudie des v.a. du type $Z = g(X,Y)$ où $(X,Y)$ est un couple de v.a. discrètes et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.

## III.1. Cas général : loi de $g(X,Y)$

**Théorème 4.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soit $(X,Y)$ un couple de v.a. discrètes.*

*Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to E$.*

- *L'application $Z$ est une v.a. discrète.*
- *L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X,Y)$ est donnée par :*

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subseteq & \{g(x,y) \mid x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega)\} \end{array}$$

- *La loi de $Z = g(X,Y)$ est donnée par :*

$$\boxed{\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}\big(\{Z = z\}\big) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ z = g(x,y)}} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)}$$

*Démonstration.*
Il suffit de remarquer :

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \{Z = z\} = \bigcup_{\substack{(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ z = g(x,y)}} \{X = x\} \cap \{Y = y\}$$

et que $(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles (car c'est un sce). □

**Remarque**

- Le théorème précédente stipule que la loi de $g(X,Y)$ est fournie par la loi conjointe de $X$ et de $Y$.
- Si on sait de plus que $X$ et $Y$ sont indépendantes, les lois de $X$ et de $Y$ suffisent à obtenir la loi de $g(X,Y)$. L'indépendance fournit un cadre simple pour l'étude de la loi de $g(X,Y)$.

## III.2. Loi de la somme de deux v.a. discrètes

### III.2.a) Cas général

**Théorème 5.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soit $(X,Y)$ un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

- *L'application $X + Y$ est une v.a. discrète.*
- *La loi de $X + Y$ est fournie par, pour tout $z \in (X+Y)(\Omega)$ :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\{X+Y = z\}\big) & = & \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z - x \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = z - x\}\big) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{z - y \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}\big(\{X = z - y\} \cap \{Y = y\}\big) \end{array}}$$

*Démonstration.*
La famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ forme un sce.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\{X+Y = z\}\big) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{X+Y = z\}\big) \\ & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = z - x\}\big) \end{array}$$

□

À RETENIR

- On note que la probabilité $\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = z - x\}\big)$ est nulle dès que $z - x$ n'appartient pas à $Y(\Omega)$ puisqu'alors $\{Y = z - x\} = \varnothing$.
- Ceci a pour conséquence de restreindre les indices de sommation lors du calcul de $\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = z - x\}\big)$.

**Remarque**

- Ce qui importe le plus ici est de retenir la méthode plus que l'énoncé en lui-même. Si l'on souhaite déterminer la probabilité d'un événément construit à l'aide de deux v.a. discrètes, la bonne manière de procéder est d'utiliser la formule des probabilités totales.
- On peut illustrer le propos précédent en listant certaines cas donnant lieu à l'utilisation de la formule des probabilités totales :

  $\mathbb{P}\big(\{XY = 1\}\big)$, $\mathbb{P}\big(\{X - Y = 4\}\big)$, $\mathbb{P}\big(\{2\,X + Y = -1\}\big)$, $\mathbb{P}\big(\{X = Y\}\big)$, ...

  En particulier :
  - × la loi du produit $XY$ de deux v.a.r. discrètes s'obtient par cette méthode.
  - × il convient de remarquer : $\mathbb{P}\big(\{X = Y\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X - Y = 0\}\big)$. Déterminer la probabilité que deux v.a. soient égales n'est donc qu'un calcul de probabilité illustrant la loi de la somme.

**Exercice**

Soit $X$ et $Y$ deux v.a. discrètes indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (avec $p \in \,]0, 1[$).
En utilisant un sce associé à $X$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$ :

$$\mathbb{P}\big(\{X + Y = n\}\big) \;=\; (n-1)\,p^2\,q^{n-2}$$

### III.2.b) Cas des v.a. discrètes à valeurs entières

**Théorème 6.**

*Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes à* **valeurs entières**.
*On suppose que les v.a. $X$ et $Y$ sont indépendantes.*

$$\boxed{\forall t \in \,]-1, 1[, \;\; G_{X+Y}(t) \;=\; G_X(t) \times G_Y(t)}$$

*Généralisation*

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. à valeurs entières.*
*On suppose que les variables aléatoires de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.*
*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.*

*1.* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; X_{n+1} \perp\!\!\!\perp S_n}$

*2.* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; G_{X_1+\dots+X_n} = \prod\limits_{i=1}^{n} G_{X_i}}$

*Démonstration.*
Rappelons que les séries entières $\sum \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\; t^k$ et $\sum \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big)\; t^k$ ont toutes deux un rayon de convergence supérieur à 1.
Pour tout $t \in \,]-1, 1[$ :

$$\begin{array}{rcll} G_X(t) \times G_Y(t) & = & \mathbb{E}\big(t^X\big) \times \mathbb{E}\big(t^Y\big) & \\ & = & \mathbb{E}\big(t^X \times t^Y\big) & \text{(car les variables } t^X \text{ et } t^Y \text{ sont indépendantes par le lemme des coalitions)} \\ & = & \mathbb{E}\big(t^{X+Y}\big) \;=\; G_{X+Y}(t) & \end{array}$$

*1.* Par le lemme des coalitions.

*2.* Par récurrence. □

**Remarque**

- Il est aussi possible de faire la démonstration de ce résultat en effectuant le produit de Cauchy des séries entières $\sum \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\; t^k$ (de rayon de convergence $R_a$) et $\sum \mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big)\; t^k$ (de rayon de convergence $R_b$).
- On en déduit au passage que l'égalité $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$ est vérifiée pour tout $t \in \,]-\min(R_a, R_b), \min(R_a, R_b)[$. On peut même être plus précis : le rayon de convergence $R$ de la série issue du produit de Cauchy est exactement $R = \min(R_a, R_b)$ dans le cas où $R_a \neq R_b$.

### III.2.c) Application : stabilité des lois usuelles

**Théorème 7.**

***1)* Stabilité des lois binomiales**

*Soit $p \in ]0,1[$ et soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ X \sim \mathcal{B}(m,p) \text{ et } Y \sim \mathcal{B}(n,p) \\ \bullet\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{array} \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim \mathcal{B}(m+n,p)}$$

***2)* Stabilité des lois de Poisson**

*Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$.*

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ X \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ et } Y \sim \mathcal{P}(\mu) \\ \bullet\ X \perp\!\!\!\perp Y \end{array} \quad \Rightarrow \quad X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)}$$

*Démonstration.*

***1)*** Rappelons tout d'abord que si $X \sim \mathcal{B}(m,p)$ alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in ]-\infty,+\infty[,\ G_X(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\ t^k \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k\,(1-p)^{m-k}\ t^k \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (pt)^k\,(1-p)^{m-k} \\ & = & \big((1-p)+p\,t\big)^m \end{array}$$

Or, d'après le théorème précédent :

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in ]-\infty,+\infty[, G_{X+Y}(t) & = & G_X(t) \times G_Y(t) \\ & = & \big((1-p)+p\,t\big)^m \times \big((1-p)+p\,t\big)^n \\ & = & \big((1-p)+p\,t\big)^{m+n} \end{array}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{B}(m+n,p)$.
Or, la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire.
On en déduit : $X+Y \sim \mathcal{B}(m+n,p)$.

***2)*** Rappelons tout d'abord que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in ]-\infty,+\infty[,\ G_X(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\ t^k \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!}\ t^k \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\,t)^k}{k!} \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda}\ \mathrm{e}^{\lambda\,t} \\ & = & \mathrm{e}^{\lambda\,(t-1)} \end{array}$$

Or, d'après le théorème précédent :

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in ]-\infty,+\infty[, G_{X+Y}(t) & = & G_X(t) \times G_Y(t) \\ & = & \mathrm{e}^{\lambda\,(t-1)} \times \mathrm{e}^{\mu\,(t-1)} \\ & = & \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)\,(t-1)} \end{array}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.
Or, la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable aléatoire.
On en déduit : $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. $\square$

**Exercice**
Soient $X_1, \ldots, X_k$ des v.a. mutuellement indépendantes.
Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_k$ lorsque :

***(i)*** $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$, …, $X_k \sim \mathcal{B}(p)$.

***(ii)*** $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1,p)$, …, $X_k \sim \mathcal{B}(n_k,p)$.

***(iii)*** $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, …, $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$.

## III.3. Loi du maximum / minimum de deux v.a. discrètes réelles indépendantes

### III.3.a) Cas général

**Théorème 8.**

*Soient $X$ et $Y$ deux v.a. discrètes à valeurs réelles.*

*On suppose que $X$ et $Y$ sont* **indépendantes**.

*On définit les v.a.* $\min(X,Y)$ *et* $\max(X,Y)$ *comme suit :*

$$\begin{array}{rcccl} \min(X,Y) & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \min\big(X(\omega),Y(\omega)\big) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \max(X,Y) & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \max\big(X(\omega),Y(\omega)\big) \end{array}$$

***1)*** *Remarquons tout d'abord :*

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \{\min(X,Y) > t\} \ = \ \{X > t\} \cap \{Y > t\}}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \{\max(X,Y) \leqslant t\} \ = \ \{X \leqslant t\} \cap \{Y \leqslant t\}}$$

***2) a)*** *La v.a.* $\min(X,Y)$ *est une v.a. discrète.*

***b)*** *Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :*

$$\mathbb{P}\big(\{\min(X,Y) > t\}\big) = \Big(1 - \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\}\big)\Big)\ \Big(1 - \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant t\}\big)\Big)$$

***3) a)*** *La v.a.* $\max(X,Y)$ *est une v.a. discrète.*

***b)*** *Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :*

$$\mathbb{P}\big(\{\max(X,Y) \leqslant t\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant t\}\big)$$

*Démonstration.*

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{\min(X,Y) > t\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{X > t\} \cap \{Y > t\}\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{X > t\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{Y > t\}\big) & \textit{(car $X$ et $Y$ sont indépendantes)} \\ & = & \Big(1 - \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\}\big)\Big)\ \Big(1 - \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant t\}\big)\Big) & \end{array}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{\max(X,Y) \leqslant t\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\} \cap \{Y \leqslant t\}\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{X \leqslant t\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{Y \leqslant t\}\big) & \textit{(car $X$ et $Y$ sont indépendantes)} \end{array}$$

□

### III.3.b) Loi du mininimum de deux v.a. indépendantes de lois géométriques

**Théorème 9.**

*Soit $X$ une v.a. discrète à valeurs réelles.*

*Soit $p \in \,]0,1[$.*

- *Préambule*

$$\boxed{\begin{array}{l} \times\ X \text{ est une v.a.r. à valeurs entières} \\ \times\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) = (1-p)^k \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad X \sim \mathcal{G}(p)}$$

- *Loi du minimum de deux variables de lois géométriques*

  *Soient $p_1 \in \,]0,1[$ et $p_2 \in \,]0,1[$.*

  *Soient $X$ et $Y$ deux v.a. discrètes telles que : $X \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$.*

*1)* $\boxed{\forall x \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{\min(X,Y) > k\}\big) \ = \ (1-p_1)^k\ (1-p_2)^k}$

*2) On en déduit :* $\min(X,Y) \sim \mathcal{G}(r)$ *où* $r = 1-(1-p_1)\ (1-p_2)$.

*Démonstration.*

($\Rightarrow$) Supposons :

$\times$ $X$ est une v.a. à valeurs entières

$\times$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) = (1-p)^k$

Rappelons tout d'abord :

$$\begin{array}{ccc} \{X \geqslant k\} & = & \{X > k\} \cup \{X = k\} \\ \| & & \\ \{X > k-1\} & & \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

Ainsi : $\mathbb{P}\big(\{X > k-1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$.

Finalement :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{X > k-1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) \\ & = & (1-p)^{k-1} - (1-p)^k \\ & = & (1-p)^{k-1}\ \big(\cancel{1} - (\cancel{1} - p)\big) \ = \ p\,(1-p)^{k-1} \end{array}$$

Ainsi : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

($\Leftarrow$) Supposons : $X \sim \mathcal{G}(p)$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{\{X > k\}}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big(\{X \leqslant k\}\big)$$

Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a : $\{X \leqslant k\} \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{X = i\}$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{X \leqslant k\}\big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \{X = i\}\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{X = i\}) & \textit{(par incompatibilité)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ (1-p)^{i-1} & \\ & = & p \sum\limits_{i=0}^{k-1} (1-p)^i & \\ & = & p\ \dfrac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} & \\ & = & 1-(1-p)^k & \end{array}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}\big(\{X > k\}\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big(\{X \leqslant k\}\big) \ = \ 1 - (1-(1-p)^k) \ = \ (1-p)^k$$

*1)* Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{\min(X,Y) > k\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{X > k\} \cap \{Y > k\}\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{X > k\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{Y > k\}\big) & \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\ & = & (1-p_1)^k\ (1-p_2)^k & \\ & = & \Big((1-p_1)\,(1-p_2)\Big)^k & \end{array}$$

*2)* Comme $X$ et $Y$ sont à valeurs entières, il en est de même de $\min(X, Y)$. On en déduit, par le point précédent :

$$\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(r) \quad \text{où} \quad qr = 1 - (1 - p_1)\ (1 - p_2)$$

□

# IV. Calculs d'espérance de variables aléatoires réelles ou complexes

## IV.1. Espérance de $Z = g(X, Y)$ par théorème de transfert

**Théorème 10.** *(théorème de transfert)*

*Soit $Z = (X, Y)$ un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

*Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{K}$ une application.*

*1)* *La v.a. $g(Z)$ est d'espérance finie* $\Leftrightarrow$ *La famille $\big(g(z)\ \mathbb{P}(\{Z = z\})\big)$ est sommable*

$\Leftrightarrow$ *La famille $\big(g(x, y)\ \mathbb{P}(\{(X, Y) = (x, y)\})\big)$ est sommable*

*2)* *Dans ce cas :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(g(Z)\big) &= \sum_{z \in Z(\Omega)} g(z)\ \mathbb{P}(\{Z = z\}) \\
&= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y)\ \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{y \in X(\Omega)} g(x, y)\ \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \right) \\
&= \sum_{y \in X(\Omega)} \left( \sum_{x \in X(\Omega)} g(x, y)\ \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \right)
\end{aligned}$$

**Remarque**

- Lorsque les v.a. sont à valeurs positives :
  - × le théorème de Fubini positif permet de faire des interversions de sommes (qui sont alors des quantités de $[0, +\infty]$).
  - × la sommabilité se décrète en fin de calcul si le résultat obtenu est fini.
- Ce cas est à considérer comme un cadre idéal pour les calculs de sommes.

**Exercice**

Considérons deux variables aléatoires $X$ et $Y$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{i + j}{\mathrm{e}\ 2^{i+j}\ i!\ j!}$$

Calculer l'espérance de $Z = 2^{X+Y}$.

## IV.2. Espérance d'une somme

**Théorème 11.** *(linéarité de l'espérance)*

*Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.*

*Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. discrètes d'espérances finies.*

*1)* *Alors $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ est d'espérance finie.*

*2)* *De plus :*

$$\boxed{\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mathbb{E}(X_i)}$$

*En particulier, lorsque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 1$, on obtient :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

**Exemple**

Soient $X_1$, …, $X_n$ des v.a. discrètes.

On suppose que les v.a. $X_1$, …, $X_n$ sont mutuellement indépendantes.

On suppose de plus : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

*1)* $S_n = X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$

*($S_n$ prend pour valeur le nombre de succès dans une répétition de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p$)*

*2)* On retrouve l'espérance d'une v.a. qui suit la loi binomiale :

$$\mathbb{E}(S_n) \ = \ \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) \ = \ \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = n\,p$$

## IV.3. Espérance d'un produit

### IV.3.a) Formulation générale

**Théorème 12.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

*On suppose que $X$ et $Y$ sont de moments d'ordre 2 finis.*

*1) Alors $XY$ est d'espérance finie.*

*2) De plus :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(XY\big) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x\,y\ \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left( \sum_{y\in X(\Omega)} x\,y\ \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \right) \\ &= \sum_{y\in X(\Omega)} \left( \sum_{x\in X(\Omega)} x\,y\ \mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \right)\end{aligned}$$

*Démonstration.*

*1)* Remarquons tout d'abord : $\big(|X| - |Y|\big)^2 \geqslant 0$. On en déduit :

$$|XY| \ \leqslant \ \frac{1}{2}\ |X|^2 + \frac{1}{2}\ |Y|^2$$

La v.a. $\frac{1}{2}\ |X|^2 + \frac{1}{2}\ |Y|^2$ est d'espérance finie en tant que combinaison linéaire de v.a. d'espérances finies ($|X|^2$ et $|Y|^2$ sont d'espérances finies car $X$ et $Y$ sont de moments d'ordre 2 finis).

*2)* Par théorème de transfert. □

### IV.3.b) Cas de v.a. indépendantes

**Théorème 13.**

*Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes.*

*On suppose :*
- × *$X$ et $Y$ sont d'espérances finies.*
- × *$X$ et $Y$ sont indépendantes.*

*Alors $X\,Y$ est d'espérance finie et :*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

Ce théorème n'énonce pas un équivalence.
Autrement dit, il existe des variables aléatoires $X$ et $Y$ :
- × qui ne sont pas indépendantes,
- × qui vérifient $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

*Démonstration.*

***1)*** • Il s'agit de démontrer que la v.a. $|XY|$ est d'espérance finie. Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(|XY|\big) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{y \in X(\Omega)} |\,x\,y\,|\ \mathbb{P}\big(\{X = x\} \ \cap\ \{Y = y\}\big) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{y \in X(\Omega)} |x|\ |y|\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\ \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( |x|\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \sum_{y \in X(\Omega)} |y|\ \mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} |x|\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\ \mathbb{E}\big(|Y|\big) \\
&= \mathbb{E}\big(|Y|\big) \sum_{x \in X(\Omega)} |x|\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) \ = \ \mathbb{E}\big(|Y|\big)\ \mathbb{E}\big(|X|\big)
\end{aligned}$$

• Comme $X$ et $Y$ sont d'espérances finies, alors :

$$\mathbb{E}\big(|X|\big) < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big(|Y|\big) < +\infty$$

Ainsi : $\mathbb{E}\big(|XY|\big) < +\infty$ et la v.a. $XY$ est donc d'espérance finie.

***2)*** On obtient le résultat souhaité par théorème de transfert avec des calculs similaires à ceux effectués en ***1)***. □

**Exercice**

Soient $X_1$, $X_2$ et $X_3$ indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in \,]0,1[$.

Montrer que les v.a. $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes.

*Démonstration.*

• Comme $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et sont d'espérances finies, la v.a. $Y_1 = X_1\,X_2$ est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1\,X_2) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$$

• De même, $Y_2$ est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(Y_2) = \mathbb{E}(X_2\,X_3) = \mathbb{E}(X_2)\,\mathbb{E}(X_3)$$

• Comme $X_2 \sim \mathcal{B}(p)$, ${X_2}^2 = X_2$. Et ainsi :

$$Y_1\,Y_2 = X_1\,X_2\,X_2\,X_3 = X_1\,{X_2}^2\,X_3 = X_1\,X_2\,X_3$$

Comme $X_1$, $X_2$, $X_2$ sont indépendantes, par le lemme des coalitions les v.a. $X_1\,X_2$ et $X_3$ sont indépendantes. Ces deux v.a. sont d'espérances finies. On en déduit que $Y_1\,Y_2$ est d'espérance finie et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_1\,Y_2) &= \mathbb{E}(X_1\,X_2\,X_3) \\
&= \mathbb{E}(X_1\,X_2)\,\mathbb{E}(X_3) \\
&= \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)\,\mathbb{E}(X_3) \ = \ p^3
\end{aligned}$$

• $$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_1)\,\mathbb{E}(Y_2) &= \mathbb{E}(X_1\,X_2)\,\mathbb{E}(X_2\,X_3) \\
&= \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)\,\mathbb{E}(X_2)\,\mathbb{E}(X_3) \ = \ p^4
\end{aligned}$$

• Or :

$$p^3 = p^4 \ \Leftrightarrow\ p^3\,(p-1) = 0 \ \Leftrightarrow\ p = 0 \ \texttt{OU} \ p = 1$$

Ainsi, $\mathbb{E}(Y_1\,Y_2) \neq \mathbb{E}(Y_1)\,\mathbb{E}(Y_2)$ et les v.a. ne sont pas indépendantes. □

# V. Calculs de variance et covariance de v.a. discrètes réelles

## V.1. Covariance de v.a. discrètes réelles

### V.1.a) Définition

**Définition**

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes réelles.

On suppose que $X$ et $Y$ sont de moment d'ordre 2 finis.

La **covariance** de $X$ et $Y$ est définie par :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))\ (Y - \mathbb{E}(Y))\Big)}$$

### V.1.b) Calcul en pratique

**Théorème 14.** *(formule de Kœnig-Huygens)*

*Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes réelles.*

*On suppose que $X$ et $Y$ sont de moments d'ordre 2 finis.*

*Alors :* $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)}$

*En particulier, on a :*

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X)}$$

*Démonstration.*

- Par définition :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Cov}(X,Y) \\
= \ & \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\big) \\
= \ & \mathbb{E}\big(XY - \mathbb{E}(Y)X - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\big) \\
= \ & \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
= \ & \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

- $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(X-\mathbb{E}(X))\big) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{V}(X)$ □

**Exemple**

On reprend l'exemple des v.a. $Z_1$ et $Z_2$ qui représentent respectivement le résultat de premier dé et du deuxième dé lors du lancer de deux dés à 3 faces.

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) \ = \ \mathbb{E}(Z_1\, Z_2) - \mathbb{E}(Z_1)\, \mathbb{E}(Z_2) \ = \ 4 - 2 \times 2 \ = \ 0$$

*(c'est toujours le cas lorsque $Z_1$ et $Z_2$ sont indépendantes, puisqu'alors on a : $\mathbb{E}(Z_1 Z_2) = \mathbb{E}(Z_1)\ \mathbb{E}(Z_2)$)*

### V.1.c) Propriétés de la covariance

**Théorème 15.**

*Soient $X$, $Y$, $X_i$, $Y_i$ des v.a. discrètes.*

*Supposons que ces v.a. sont de moments d'ordre 2 finis.*

*L'opérateur de covariance vérifie les propriétés suivantes.*

*1)* $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)}$
*(propriété de symétrie)*

*2)* $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2, Y) = \lambda\, \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mu\, \mathrm{Cov}(X_2, Y)}$
*(linéarité à gauche)*

*3)* $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(X, \lambda\, Y_1 + \mu\, Y_2) = \lambda\, \mathrm{Cov}(X, Y_1) + \mu\, \mathrm{Cov}(X, Y_2)}$
*(linéarité à droite)*

*4)* $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \mathrm{Cov}(X, a) = \mathrm{Cov}(a, X) = 0}$

*Démonstration.*

*1)* D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y,X) &= \mathbb{E}(YX) - \mathbb{E}(Y)\, \mathbb{E}(X) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y) \\
&= \mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

*2)* Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Comme $X_1$ et $X_2$ sont de moments d'ordre 2 finis, c'est aussi le cas de $\lambda\, X_1 + \mu\, X_2$. De plus :

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Cov}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2, Y) \\
= \ & \mathbb{E}((\lambda\, X_1 + \mu\, X_2)\, Y) - \mathbb{E}(\lambda\, X_1 + \mu\, X_2)\, \mathbb{E}(Y) && \textit{(par la formule de Kœnig)} \\
= \ & \mathbb{E}(\lambda\, X_1\, Y + \mu\, X_2\, Y) - (\lambda\, \mathbb{E}(X_1) + \mu\, \mathbb{E}(X_2))\, \mathbb{E}(Y) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
= \ & \lambda\, \mathbb{E}(X_1\, Y) + \mu\, \mathbb{E}(X_2\, Y) - \lambda\, \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(Y) - \mu\, \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(Y) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
= \ & \lambda\, (\mathbb{E}(X_1\, Y) - \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(Y)) + \mu\, (\mathbb{E}(X_2\, Y) - \mathbb{E}(X_2)\, \mathbb{E}(Y)) \\
= \ & \lambda \operatorname{Cov}(X_1, Y) + \mu \operatorname{Cov}(X_2, Y) && \textit{(par la formule de Kœnig)}
\end{aligned}$$

*3)* Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Cov}(X, \lambda\, Y_1 + \mu\, Y_2) \\
= \ & \operatorname{Cov}(\lambda\, Y_1 + \mu\, Y_2, X) && \textit{(par symétrie)} \\
= \ & \lambda \operatorname{Cov}(Y_1, X) + \mu \operatorname{Cov}(Y_2, X) && \textit{(par le point 2))}
\end{aligned}$$

*4)* Soit $a \in \mathbb{R}$. $\operatorname{Cov}(X, a) = \mathbb{E}(aX) - \mathbb{E}(a)\, \mathbb{E}(X) = a\, \mathbb{E}(X) - a\, \mathbb{E}(X) = 0$.

□

### V.1.d) Une condition nécessaire d'indépendance

**Théorème 16.**

*Soient $X$ et $Y$ deux v.a. (discrètes).*

*On suppose que $X$ et $Y$ sont de moments d'ordre 2 finis.*

$$\boxed{X \textit{ et } Y \textit{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Cov}(X, Y) = 0}$$

*Démonstration.*
On utilise la formule de Kœnig-Huygens :

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X\, Y) - \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y)$$

Or, comme les v.a. $X$ et $Y$ sont indépendantes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ E(Y)$.
On en déduit que $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$. □

**Remarque**

- Généralement c'est la contraposée de cet énoncé qui est utilisée. Elle permet de démontrer que deux v.a. $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X, Y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence. Autrement dit, il existe des variables aléatoires $X$ et $Y$ :

× qui ne sont pas indépendantes,

× qui vérifient $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

## V.2. Variance d'une somme de v.a. discrètes réelles

### V.2.a) Cas général

**Théorème 17.**

*Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes réelles.*

*On suppose que $X$ et $Y$ sont de moments d'ordre 2 finis.*
*(c'est-à-dire que $X$ et $Y$ sont de variances finies)*

*1) Alors $X + Y$ est de variance finie.*

*2) De plus :* $\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\ \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)}$

**Généralisation**

*Soient $X_1$, ..., $X_n$ des v.a. discrètes réelles.*

*On suppose que les v.a. $X_1$, ..., $X_n$ sont d'espérances finies.*

*1) Alors $X_1 + \ldots + X_n$ est de variance finie.*

*2) De plus :*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{V}\big(X_1 + \ldots + X_n\big) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{Cov}(\ X_i\ ,\ X_j\ ) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(\ X_i\ ,\ X_j\ )\end{aligned}}$$

*Démonstration.*

*1)* Comme : $(X+Y)^2 = X^2 + 2\ XY + Y^2$, et que chaque élément de la somme est d'espérance finie, $X + Y$ est de moment d'ordre 2 fini.

*2)* On utilise la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}&\mathbb{V}(X+Y) \\ =\ & \mathbb{E}((X+Y)^2) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\ =\ & \mathbb{E}\left(X^2 + Y^2 + 2\,XY\right) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\ =\ & \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) + 2\ \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\ \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ =\ & \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)\end{aligned}$$

□

### V.2.b) Variance d'une somme de v.a. indépendantes

**Théorème 18.**

*Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. discrètes réelles.*

*On suppose que $X$ et $Y$ sont de moments d'ordre 2 finis.*
*(c'est-à-dire que $X$ et $Y$ sont de variances finies)*

*1) Alors la v.a. $X + Y$ est de variance finie. De plus :*

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}$$

*2)* **Généralisation**

> *On suppose :*
> × $X_1, \ldots, X_n$ *sont de variances finies.*
> × $X_1, \ldots, X_n$ *mutuellement indépendantes.*
>
> *Alors $X_1 + \ldots + X_n$ est de variance finie et :*
>
> $$\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n)$$

*Démonstration.*

*1)* Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
Donc, d'après le théorème précédent, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

*2)* Par récurrence. □

**Exemple**

Soient $X_1$, ..., $X_n$ des v.a. discrètes.

On suppose que les v.a. $X_1$, ..., $X_n$ sont mutuellement indépendantes.

On suppose de plus : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

*1)* $S_n = X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$
*($S_n$ prend pour valeur le nombre de succès dans une répétition de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p$)*

*2)* On retrouve la variance d'une v.a. qui suit la loi binomiale :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n) = n\,p\,q$$

# VI. Inégalités de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires réelles

## VI.1. Les semi-produit scalaires sur l'ensemble des variables aléatoires (discrètes)

**Définition**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

*1)* L'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.
L'ensemble des variables aléatoires discrètes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires.
L'ensemble des variables aléatoires (discrètes) d'espérance finie est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires (discrètes).
L'ensemble des variables aléatoires (discrètes) de moment d'ordre 2 fini est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires (discrètes) d'espérance finie. Notons $\mathscr{L}^2(\Omega)$ ce dernier espace vectoriel.

*2)* Les applications $\langle \cdot, \cdot \rangle_{s_1}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{s_2}$ définies par :

$$\begin{array}{rccccl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{s_1} : & (X & , & Y) & \mapsto & \mathbb{E}(XY) \\ & \mathscr{L}^2(\Omega) & \times & \mathscr{L}^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{s_2} : & (X & , & Y) & \mapsto & \mathrm{Cov}(X, Y) \\ & \mathscr{L}^2(\Omega) & \times & \mathscr{L}^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

sont :

× bilinéaires,
× symétriques,
× ~~définies~~-positives.

De telles applications sont appelées des semi-produit scalaires. Elles permettent de définir des semi-normes :

$$\forall X \in \mathscr{L}^2(\Omega), \ \|X\|_{s_1} = \sqrt{\langle X, X \rangle_{s_1}} \quad \text{et} \quad \|X\|_{s_2} = \sqrt{\langle X, X \rangle_{s_2}}$$

Une semi-norme est une application $\mathscr{L}^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ homogène qui vérifie les propriétés de ~~séparation~~, d'homogénéité et d'inégalité triangulaire.

## VI.2. Énoncés des inégalités de Cauchy-Schwarz

**Théorème 19.**

*Énoncé dans le cas général*

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$.*

- $$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \ \left| \langle x, y \rangle_s \right| \leqslant \|x\|_s \, \|y\|_s}$$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*

  *Ce qu'on peut aussi écrire :*

  $$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle_s \times \langle x, y \rangle_s \leqslant \langle x, x \rangle_s \times \langle y, y \rangle_s}$$

- *On peut caractériser le cas d'égalité. Pour tout $(x, y) \in E^2$ :*

  $$\boxed{\left| \langle x, y \rangle_s \right| = \|x\|_s \, \|y\|_s \Leftrightarrow \exists ! \, \lambda \in \mathbb{R}, \ \| \lambda \cdot x + y \|_s = 0}$$

*Inégalités de Cauchy-Schwarz probabilistes*

*1)* $$\boxed{\forall (X, Y) \in \left(\mathscr{L}^2(\Omega)\right)^2, \ \left( \mathbb{E}(XY) \right)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right) \, \mathbb{E}\left(Y^2\right)}$$

*On peut caractériser le cas d'égalité. Pour tout $(X, Y) \in \left(\mathscr{L}^2(\Omega)\right)^2$ :*

$$\boxed{\left( \mathbb{E}(XY) \right)^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) \, \mathbb{E}\left(Y^2\right) \Leftrightarrow \text{Les v.a. } X \text{ et } Y \text{ sont presque sûrement colinéaires}}$$

*2)* $$\boxed{\forall (X, Y) \in \left(\mathscr{L}^2(\Omega)\right)^2, \ \left( \mathrm{Cov}(X, Y) \right)^2 \leqslant \mathrm{Cov}(X, X) \, \mathrm{Cov}(Y, Y)}$$

*On peut caractériser le cas d'égalité. Pour tout $(X, Y) \in \left(\mathscr{L}^2(\Omega)\right)^2$ :*

$$\boxed{\left( \mathrm{Cov}(X, Y) \right)^2 = \mathrm{Cov}(X, X) \, \mathrm{Cov}(Y, Y) \Leftrightarrow \text{Une des v.a. est presque sûrement une fonction affine de l'autre}}$$

*Démonstration.*

***1)*** • Soit $(x, y) \in E^2$. Considérons la fonction $f : t \mapsto \| t \cdot x + y \|_s^2$.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & \| t \cdot x + y \|_s^2 \\ & = & \langle t \cdot x + y, t \cdot x + y \rangle_s \\ & = & \langle t \cdot x, t \cdot x \rangle_s \;+\; \langle t \cdot x, y \rangle_s \;+\; \langle y, y \rangle_s \\ & & \qquad\qquad\;\; +\; \langle y, t \cdot x \rangle_s \\ & = & t^2 \, \|x\|_s^2 \;+\; 2t \, \langle x, y \rangle_s \;+\; \|y\|_s^2 \\ & = & \|x\|_s^2 \, t^2 + 2 \, \langle x, y \rangle_s \, t + \|y\|_s^2 \end{array}$$

Ainsi, la fonction $f$ est polynomiale de degré 2.
On note $P$ le polynôme de degré 2 associé.

• Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$ : $f(t) = \| t \cdot x + y \|_s^2 \geqslant 0$.
Cette fonction polynomiale étant de signe constant, on en déduit que le discriminant de $P$ est de signe négatif. Or :

$$\Delta \;=\; \left(2 \, \langle x, y \rangle_s \right)^2 - 4\|x\|_s^2 \, \|y\|_s^2 \;=\; 4 \, \left( \langle x, y \rangle_s \right)^2 - 4 \, \|x\|_s^2 \, \|y\|_s^2$$

Et enfin : $\Delta \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \cancel{4} \, \left( \langle x, y \rangle_s \right)^2 \;\leqslant\; \cancel{4} \, \|x\|_s^2 \, \|y\|_s^2$

***2)*** Déterminons maintenant sous quelle condition a lieu l'égalité de l'énoncé.

$$\begin{array}{rl} & \left( \langle x, y \rangle_s \right)^2 = \|x\|_s^2 \, \|y\|_s^2 \\ \Leftrightarrow & \Delta = 0 \\ \Leftrightarrow & \text{Le polynôme } P \text{ admet une unique racine } \lambda \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \exists ! \, \lambda \in \mathbb{R}, \; P(\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists ! \, \lambda \in \mathbb{R}, \; \| \lambda \cdot x + y \|_s^2 = 0 \end{array}$$

***3)*** Il reste alors à détailler les cas d'égalité des inégalités probabilistes.

• Pour $(X, Y) \in \left(\mathscr{L}^2(\Omega)\right)^2$ :

$$\begin{array}{rcl} \left\| \lambda \cdot X + Y \right\|_{s_1}^2 = 0 & \Leftrightarrow & \mathbb{P}\big( \{ \lambda \cdot X + Y = 0 \} \big) \;=\; 1 \\ & \Leftrightarrow & \text{Les v.a. sont presque sûrement colinéaires} \end{array}$$

• Pour $(X, Y) \in \left(\mathscr{L}^2(\Omega)\right)^2$ :

$$\begin{array}{rcl} \left\| \lambda \cdot X + Y \right\|_{s_2}^2 = 0 & \Leftrightarrow & \exists ! \, \mu \in \mathbb{R}, \; \mathbb{P}\big( \{ \lambda \cdot X + Y = 0 \} \big) \;=\; 1 \\ & \Leftrightarrow & \text{L'une des deux v.a. est presque sûrement} \\ & & \text{une fonction affine del'autre} \end{array}$$

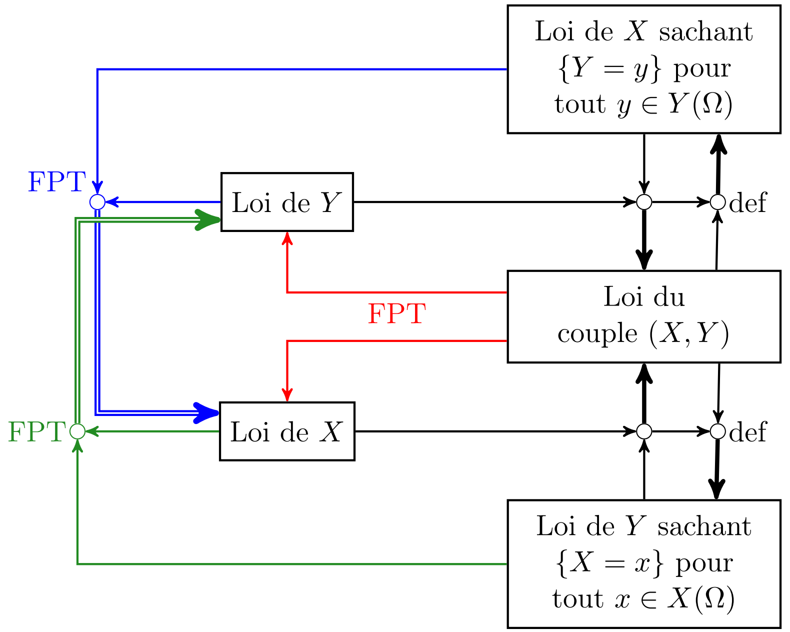
□

## Bilan du chapitre : liens entre les différentes lois

Il faut savoir :

- faire le lien entre la loi de couples et les lois conditionnelles.
- déterminer les lois marginales si on connaît la loi du couple,
- déterminer les lois marginales si on connaît les lois conditionnelles.

Les liens en ces différentes notions sont rappelés dans le schéma suivant.




On retiendra que la formule des probabilités totales est la clé pour déterminer les lois marginales. Si la détermination de la loi du couple / les lois conditionnelles constitue généralement la plus grande difficulté d'un exercice sur les couples, la détermination des lois marginales se résume simplement à une application de la formule des probabilités totales. Des difficultés calculatoires peuvent apparaître mais il n'y a aucune difficulté méthodologique.