CH IV : Applications linéaires - endomorphismes et matrices carrées

I. Notion d'application linéaire

I.1. Définition

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
(l'image d'une somme est la somme des images)

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E^2,\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$
(l'image d'une multiplication par un scalaire est la multiplication scalaire de l'image)

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$.
  Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E.

Théorème 1 (Caractérisation des applications linéaires)**.**
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

L'application $f : E \to F$ est linéaire

$\Leftrightarrow\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$

$\Leftrightarrow\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2,\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y)$

$\Leftrightarrow\ \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2,\ f(x + \mu \cdot y) = f(x) + \mu \cdot f(y)$

(éviter ces 2 dernières caractérisations qui introduisent une dissymétrie de traitement des vecteurs x et y et masquent la notion de CL)

Exercice

1. On considère l'application Φ définie par :

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0\big([0,1]\big) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \end{array}$$

Montrer que Φ est une application linéaire.

2. On considère l'application u définie par :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Montrer que u est une application linéaire.

I.2. Propriétés des applications linéaires

Propriété

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire.

Alors :

1) $\boxed{f(0_E)\ =\ 0_F}$

2) $\boxed{\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)}$

3) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$

$$\boxed{f(\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f(x_n)}$$

(compatibilité de f avec les combinaisons linéaires)

Démonstration.

1) Soit $x \in E$. Alors : $f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0_E$.

2) Soit $x \in E$. Alors : $f(-x) = f((-1) \cdot x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x)$.

3) Par récurrence sur $n \geqslant 1$. □

Remarque

- Une application linéaire est aussi appelé un morphisme d'espaces vectoriels. En mathématiques, il existe d'autres structures que celle d'espace vectoriel. On peut notamment citer la structure de groupe : $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.

  On parle de groupe car cet ensemble est muni d'une loi de composition interne (notée multiplicativement) $\times : GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ qui vérifie :

  a. *Associativité*
  $\forall (x, y, z) \in \big(GL_n(\mathbb{K})\big)^3,\ x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

  b. *Existence* d'un élément neutre
  $\exists\ 1_{GL_n(\mathbb{K})} \in GL_n(\mathbb{K}), \forall x \in GL_n(\mathbb{K}),\ x \times 1_{GL_n(\mathbb{K})} = 1_{GL_n(\mathbb{K})} \times x = x$

  c. *Existence* d'un inverse pour tout élément
  $\forall x \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists y \in GL_n(\mathbb{K}),\ x \times y = y \times x = 1_{GL_n(\mathbb{K})}$

  Si la loi $\times$ est commutative, on dit que le groupe est commutatif (ou abélien). Ici, on est dans le cas d'une groupe **non** commutatif.

- Une application linéaire est un morphisme d'espaces vectoriels. C'est une application qui est « compatible » avec les lois $+$ et $\cdot$ définies par la notion d'espace vectoriel.
  De la même manière, un morphisme de groupes est une application qui est compatible avec la loi $\times$ définie par la notion de groupe. Plus précisément, si $(G_1, \times_1)$ et $(G_2, \times_2)$ sont des groupes, $\varphi : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes si :

  (i) $\forall (x, y) \in G_1 \times G_2,\ \varphi(x \times_1 y) = \varphi(x) \times_2 \varphi(y)$

  (ii) $\varphi(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

- L'application $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes.
- Un intérêt de la notion de morphisme est le transport de structures. Plus précisément, lorsque $\varphi : E \to F$ est un morphisme de `STRUCTURE` (remplacer ce terme par espace vectoriel ou groupe ou par tout autre structure) :

H est une sous-`STRUCTURE` de E	$\Rightarrow$	$\varphi(H)$ (image directe) est une sous-`STRUCTURE` de F

G est une sous-`STRUCTURE` de F	$\Rightarrow$	$\varphi^{-1}(G)$ (image réciproque) est une sous-`STRUCTURE` de E

  En particulier, lorsque $\varphi : E \to F$ est une application linéaire (un morphisme d'espaces vectoriels), alors $\varphi(E) = \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\varphi^{-1}(\{0_F\}) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- En utilisant la propriété ***3)*** du théorème précédent, on obtient immédiatement qu'une application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et concave. En ajoutant la contrainte $f(0) = 0$, on en déduit que les seules applications linéaires $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de la forme $f : x \to \lambda x$ (fonctions représentées par des droites passant par l'origine).

I.3. Exemple fondamental

Théorème 2.

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Soit $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.
Alors, il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que h s'écrit sous la forme :

$$h \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Démonstration.
Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
Notons $\mathscr{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ la base canonique de $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le vecteur X se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}_E$. Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_p \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$$

Par application de la fonction h, linéaire, on obtient :

$$h(X) = x_1 \cdot h(e_1) + \dots + x_p \cdot h(e_p)$$

Cette écriture met en avant une propriété des applications linéaires sur les ev de dimension finie : les valeurs $h(e_1)$, …, $h(e_p)$ permettente de déterminer la valeur de $h(X)$.
Ainsi, h est entièrement déterminée par l'image de la base $\mathscr{B}_E$.

- Notons alors :

$$h(e_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \qquad \dots \qquad h(e_p) = \begin{pmatrix} m_{1p} \\ m_{2p} \\ \vdots \\ m_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

- Alors :

$$h(X) = \begin{pmatrix} m_{11}\ x_1 + \dots + m_{1p}\ x_p \\ m_{21}\ x_1 + \dots + m_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ m_{n1}\ x_1 + \dots + m_{np}\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & \dots & m_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = MX$$

où $M = (m_{ij})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$ $\square$

Remarque

- Ce théorème stipule que « les applications linéaires de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont les matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ».
- Cela peut être vu comme une bonne ou une mauvaise nouvelle :
  - × on peut être un peu déçu qu'il n'y ait que si peu d'applications linéaires de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On aurait pu espérer une plus grande richesse de construction.
  - × la relative simplicité de l'objet étudié est rassurante.

  On verra qu'il n'y a en réalité pas de raison d'être déçu car la notion d'applications linéaires permet des développements suffisamment riches.

II. Structure de l'ensemble des applications linéaires

II.1. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$

Théorème 3.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- *L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni :*
  - × *d'une loi de composition interne, notée $+$*
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $v \in \mathscr{L}(E, F)$, $u + v$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$u + v : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) +_F v(x) \end{array}$$

  - × *d'une loi de composition externe, notée $\cdot$*
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\lambda \cdot u : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda \cdot_F u(x) \end{array}$$

- *L'espace $\mathscr{L}(E, F)$ muni de $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel.*

II.2. Composition d'applications linéaires

II.2.a) Propriété de la loi $\circ$

Théorème 4.

Soient E, F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E), \ \ u \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ u = u$.

Par ailleurs, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on introduit la notation :

$$\begin{cases} u^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, \ u^{k+1} = u^k \circ u \ (= u \circ u^k) \end{cases}$$

(La notation $u^2(x) = u(u(x))$ ne doit pas être confondue avec l'élévation au carré ! $u(x) \times u(x)$ n'a pas de sens dans le cadre d'espaces vectoriels)

2) $\forall u \in \mathscr{L}(E,F), \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \ v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

3) $\forall u \in \mathscr{L}(E,F), \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \forall w \in \mathscr{L}(G,H), \ w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.
(associativité de la loi $\circ$)

II.2.b) Comportement de la loi $\circ$ vis à vis des lois $+$ et $\cdot$

Théorème 5.

Soient E, F, G et H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1) $\forall u \in \mathscr{L}(E,F), \ \forall (v_1, v_2) \in \big(\mathscr{L}(F,G)\big)^2, \ (v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.
(distributivité à droite de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

2) $\forall (u_1, u_2) \in \big(\mathscr{L}(E,F)\big)^2, \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \ v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.
(distributivité à gauche de la loi $\circ$ par rapport à la loi $+$)

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall u \in \mathscr{L}(E,F), \ \forall v \in \mathscr{L}(F,G), \ v \circ (\lambda \cdot u) = (\lambda \cdot v) \circ u = \lambda \cdot (v \circ u)$.

Remarque

- Si E est un espace vectoriel, on a vu que l'espace $\mathscr{L}(E)$ est naturellement muni des lois $+$, $\cdot$ qui en font un espace vectoriel.
- On voit de plus que $\mathscr{L}(E)$ est muni de la loi $\circ$ qui se comporte bien vis à vis des lois $+$ et $\cdot$. Ajouté aux lois $+$ et $\cdot$, la loi $\circ$ munit l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ d'une structure nommée **algèbre**. Cette algèbre est dite non commutative car la loi $\circ$ n'est pas commutative (si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$, on n'a pas nécessairement $u \circ v = v \circ u$).

Exercice

Soit E un espace vectoriel réel.
Soient u et v des endomorphismes de E tels que u et v commutent :

$$u \circ v = v \circ u$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, u^k et v commutent :

$$u^k \circ v = v \circ u^k$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$$

II.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

II.3.a) Définition

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application $u : E \to F$ est un **isomorphisme de E dans F** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  (ii) u est bijective.
  S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes.
- Une application $u : E \to E$ est un **automorphisme de E** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E)$ (autrement dit, u est un endomorphisme de E).
  (ii) u est bijective.

II.3.b) Application réciproque, cas général

Rappels sur les applications (pas forcément linéaires)

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).

Rappelons que :

$$\begin{array}{ll} & f : E \to F \text{ est bijective} \\ \Leftrightarrow & f \text{ est injective et surjective} \\ \Leftrightarrow & \text{tout élément } y \in F \text{ admet un et un seul antécédent } x \in E \text{ par } f \\ \Leftrightarrow & \forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x) \end{array}$$

Définition

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application (pas nécessairement linéaire).

Supposons que f est bijective.

- On appelle **application réciproque de** f et on note $f^{-1} : F \to E$, l'application définie par :

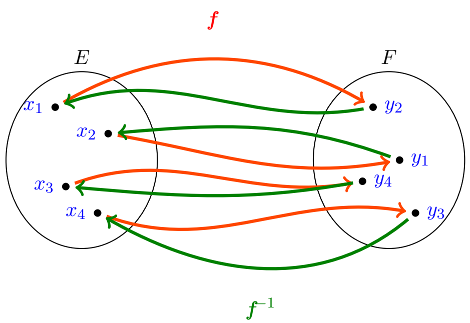
$$\begin{array}{rcccl} f^{-1} & : & F & \to & E \\ & & y & \mapsto & f^{-1}(y) : \text{l'unique antécédent} \\ & & & & \text{de } y \text{ par l'application } f \end{array}$$

- On en déduit immédiatement :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \boxed{y = f(x) \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(y) = x}$$

Représentation graphique.

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.



- Une application $f : E \to F$ bijective établit une correspondance un à un entre des éléments de E vers les éléments de F.
- Son application réciproque f^{-1} établit la même correspondance mais dans l'autre sens : des éléments de F vers les éléments de E.

Exercice

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

1. a) Démontrer : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f : E \to G$ est injective

b) Démontrer : $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ f injective

2. a) Démontrer : $\left.\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f : E \to G$ est surjective

b) Démontrer : $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g surjective

Théorème 6.

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soit $f : E \to F$ une application bijective (pas nécessairement linéaire).

On note $f^{-1} : F \to E$ sa bijection réciproque.

1. *L'application f^{-1} est bijective et de réciproque f :* $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

2. a) $\forall x \in E, \forall y \in F,$ $\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$

b) $\boxed{\forall y \in F,\ \ f(f^{-1}(y)) = y}$

c) $\boxed{\forall x \in E,\ \ f^{-1}(f(x)) = x}$

Démonstration.

1. Démontrons que l'application $f^{-1} : F \to E$ est bijective. Il s'agit de démontrer que tout élément $u \in E$ admet un unique antécédent par f^{-1}.

Soit $u \in E$. Notons $v = f(u)$. Cela équivaut à : $u = f^{-1}(v)$. Cette dernière égalité signifie, par définition, que v est un antécédent de u par f^{-1}.
Cet antécédent est forcément unique car, si $w = f^{-1}(v)$ alors $v = f(w)$ ce qui démontre, par injectivité de f : $u = w$.

2. a) C'est l'équivalence obtenue dès la définition de la notion de bijection réciproque.

b) Soit $y \in F$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par la fonction f.
Ainsi, en appliquant f à $f^{-1}(y)$, on obtient y.

c) Soit $x \in E$. Par définition, x est l'unique antécédent de $f(x)$ par la fonction f.
Autrement dit : $x = f^{-1}\big(f(x)\big)$. □

Théorème 7.

Soient E et F des ensembles (pas nécessairement des ev).

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \textit{Les applications } f \textit{ et } g \textit{ sont bijectives et} \\ \textit{réciproques l'une de l'autre :} \\ \qquad g = f^{-1} \quad \textit{et} \quad f = g^{-1} \end{array}}$$

Démonstration.

a. On sait que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Or id_E est une bijection de E dans E.
Donc $g \circ f$ est bijective. On en déduit que $g \circ f$ est notamment surjective.
Ainsi g est surjective.

De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Or id_F est une bijection de F dans F.
Donc $f \circ g$ est bijective. On en déduit que $f \circ g$ est notamment injective.
Ainsi g est injective.

On en déduit que g est bijective.
On démontre de la même manière que f est bijective.

b. La réciproque de f est par définition l'application qui à $y \in F$ associe son unique antécédent par f.
Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$.
L'élément $g(y)$ est un antécédent de y par f.
Comme f est bijective, cet élément est unique. D'où $g(y) = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\forall y \in F,\ g(y) = f^{-1}(y)$. Autrement dit : $g = f^{-1}$. □

II.3.c) Application réciproque d'un isomorphisme

Théorème 8.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Supposons que u est un isomorphisme de E dans F.

Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
(en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$)

Démonstration.

- L'application $u^{-1} : F \to E$ est bijective en tant que réciproque de l'application $u : E \to F$ qui est elle-même bijective.
- Il reste à démontre que $u^{-1} : F \to E$ est linéaire.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in F^2$.
  L'application u étant surjective :
  - × il existe $x_1 \in E$ tel que : $y_1 = u(x_1)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_1 = u^{-1}(y_1)$.
  - × il existe $x_2 \in E$ tel que : $y_2 = u(x_2)$.
    Ce qu'on peut aussi écrire : $x_2 = u^{-1}(y_2)$.

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} u^{-1}(\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) & = & u^{-1}\Big(\lambda_1 \cdot u(x_1) + \lambda_2 \cdot u(x_2)\Big) \\ & = & u^{-1}\Big(u(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2)\Big) \\ & = & \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \\ & = & \lambda_1 \cdot u^{-1}(y_1) + \lambda_2 \cdot u^{-1}(y_2) \end{array}$$

  Ainsi, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$. □

Théorème 9.

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.

Supposons que u et v sont des isomorphismes.

1) *Alors $v \circ u : E \to G$ est un isomorphisme de E.*
(on a notamment $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$)

2) *De plus :* $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}}$

Démonstration.

- L'application $v \circ u$ est linéaire ($v \circ u \in \mathscr{L}(E)$) en tant que composée de deux applications linéaires.
- Il reste à démontrer que $v \circ u$ est bijective.
  Pour ce faire, on applique le théorème 7 à $g = u^{-1} \circ v^{-1} : E \to E$ et $f = v \circ u : E \to E$. Vérifions que l'on est dans le cadre d'application de ce théorème.

$$\begin{array}{rcl} g \circ f & = & (u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) \\ & = & u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u \\ & = & u^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ u \\ & = & u^{-1} \circ u \\ & = & \mathrm{id}_E \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f \circ g & = & (v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) \\ & = & v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} \\ & = & v \circ \mathrm{id}_F \circ v^{-1} \\ & = & v \circ v^{-1} \\ & = & \mathrm{id}_E \end{array}$$

  Ainsi f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. □

III. Noyau et image d'une application linéaire

III.1. Noyau d'une application linéaire

III.1.a) Définition

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau de** f et on note $\text{Ker}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{Ker}(f) & = & \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} \\ & = & \{machin \in E \mid f\big(machin\big) = 0_F\} \end{array}}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $x \in E$: $\boxed{x \in \text{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ f(x) = 0_F}$

$$\forall machin \in E, \ \boxed{machin \in \text{Ker}(f) \ \Leftrightarrow\ f\big(machin\big) = 0_F}$$

Remarque
Par définition, $\text{Ker}(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big)$, image réciproque de l'ensemble $\{0_F\}$ (attention, il ne s'agit en aucun cas de dire que f est bijective !). Si on en croit le résultat énoncé dans la remarque initiale du cours, on va pouvoir démontrer que $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E (c'est bien le cas).

III.1.b) Structure du noyau d'une application linéaire

Théorème 10.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors $\text{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration.

1) $\text{Ker}(f) \subseteq E$ par définition.

2) $\text{Ker}(f) \neq \varnothing$ car $0_E \in \text{Ker}(f)$. En effet : $f(0_E) = 0_F$.

3) Stabilité de $\text{Ker}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(x_1, x_2) \in (\text{Ker}(f))^2$.

$$\begin{array}{rcllll} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) & = & \lambda_1 \cdot f(x_1) & + & \lambda_2 \cdot f(x_2) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_F & + & \lambda_2 \cdot 0_F & \textit{(car } x_1 \in \text{Ker}(f) \textit{ et } x_2 \in \text{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_F & & & \end{array}$$

□

Exemple
Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$.
  Alors $\text{Ker}(f) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = 0\}$.
  Ainsi, $\text{Ker}(f)$ est l'ensemble des solutions du système homogène $MX = 0$. (n inconnues et p équation)
- Il faut savoir reconnaître les ensembles représentant des noyaux.
  Par exemple, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid x = 2y \text{ et } z = -y \right\} = \text{Ker}(f)$ où l'application linéaire f est définie par :

$$\begin{array}{cccl} f : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

- L'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \mid 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$ est un ev.
  En effet, c'est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{cccl} f : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{1}(\mathbb{K}) \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

III.1.c) Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

Théorème 11.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{\textit{L'application } f \textit{ injective } \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons f injective. Démontrons que : $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.

- ($\supset$) Comme f linéaire, $f(0_E) = 0_F$.
  Ce qui démontre que : $\operatorname{Ker}(f) \supset \{0_E\}$.
- ($\subset$) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Ainsi :

$$f(x) = 0_F = f(0_E)$$

  L'application f étant injective, $x = 0_E$.
  Ce qui démontre : $x \in \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Démontrons que f est injective.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

On a alors : $f(x) - f(y) = 0_F$, ce qui s'écrit :

$$f(x - y) = 0_F$$

Ainsi, $x - y \in \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$, d'où $x - y = 0_E$ et $x = y$. □

III.2. Image d'une application linéaire

III.2.a) Définition

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **image de** f et on note $\operatorname{Im}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{y \in F \mid \exists x \in E, \ y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \in F \mid x \in E\} \\ &= \{f(\textit{truc}) \in F \mid \textit{truc} \in E\} \end{aligned}}$$

- En particulier, on retiendra, pour tout $y \in F$: $\boxed{y \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow y = f(\dots)}$

$$\forall \textit{truc} \in F, \ \boxed{\textit{truc} \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \exists \textit{bidule} \in E, \textit{truc} = f\big(\textit{bidule}\big)}$$

III.2.b) Structure de l'image d'une application linéaire

Théorème 12.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors $\operatorname{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration.

1) $\operatorname{Im}(f) \subseteq F$ par définition.

2) $\operatorname{Im}(f) \neq \varnothing$ car $0_F \in \operatorname{Im}(f)$. En effet : $0_F = f(0_E)$.

3) Stabilité de $\mathrm{Im}(f)$ par combinaisons linéaires
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et soit $(y_1, y_2) \in (\mathrm{Im}(f))^2$.
Ainsi, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 &= \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \\ &= f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \qquad \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. □

MÉTHODO **Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel**

Pour démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on peut donc utiliser l'une des propriétés suivantes.

1) Revenir à la définition et vérifier tous les axiomes.
Long et pénible – à éviter.
2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel F d'un ev E.
Méthode classique (fonctionne toujours !) à connaître absolument.
3) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_m)$.
Plus élégant et rapide.
4) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Ker}(f)$
où f est une application linéaire.
Plus élégant et rapide.
5) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \mathrm{Im}(f)$
où f est une application linéaire.
Tout aussi élégant et rapide.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Démontrer : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(2)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. *a)* Démontrer : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.
b) Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$.

À RETENIR

Démontrer qu'un vecteur $y \in F$ est dans l'image de f, c'est l'écrire sous la forme :

$$y = f(\dots)$$

Exemple
Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$.
Alors $\mathrm{Im}(f) = \{Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = MX\}$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des seconds membres Y tels que le système $MX = Y$ admet une solution.
- Il faut savoir reconnaître les ensembles écrits comme des images.
Par exemple, $F = \left\{ \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \right\} = \mathrm{Im}(f)$
où l'application linéaire f est définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

III.2.c) Caractérisation de la surjectivité d'une application

Théorème 13.
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \textit{ surjective} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F}$$

Démonstration.
On ne fait que rappeler ici le résultat obtenu dans le chapitre Ensembles et applications. □

IV. Applications linéaires en dimension finie

IV.1. Image d'une application linéaire en dimension finie

IV.1.a) Détermination pratique de l'image d'une application linéaire

Théorème 14.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) *L'application f est entièrement déterminée par sa valeur sur $\mathscr{B}$.*
Autrement dit, si l'on connaît la valeur de $f(e_1)$, ..., $f(e_p)$, on connaît la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in E$.

2) $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)}$

Démonstration.
Démonstration du point ***2)***.

($\subset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Le vecteur x se décompose de manière unique sur $\mathscr{B}$. Autrement dit, il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ tel que :

$$x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$$

Ainsi, par linéarité de f :

$$y = f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_p \cdot f(e_p)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$.

($\supset$) Soit $y \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_p)\right)$. Il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$y = \lambda_1 \cdot f(e_1) + \ldots + \lambda_p \cdot f(e_p) = f\Big(\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_p \cdot e_p\Big)$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Im}(f)$.

$\square$

IV.1.b) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / par image d'une famille libre / génératrice / base

Théorème 15.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

	L'application f est injective
$\Leftrightarrow$	*L'image par f de toute famille libre finie de E est une famille (finie) libre de F.*

	L'application f est surjective
$\Leftrightarrow$	*L'image par f de toute famille génératrice finie de E est une famille (finie) génératrice de F.*

	L'application f est bijective
$\Leftrightarrow$	*L'image par f de toute base finie de E est une base (finie) de F.*

On déduit de ce dernier résultat :

$\dim(E) = \dim(F)$	$\Leftrightarrow$	*Il existe une application linéaire bijective entre E et F*

Exercice

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

Soit F un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

a) Démontrer que si f est injective alors : $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.

b) Démontrer que si f est surjective alors : $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.

c) Démontrer que si f est bijective alors : $\dim(E) = \dim(F)$.

IV.2. Rang d'une application linéaire

IV.2.a) Définition

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On appelle rang de l'application f et on note $\text{rg}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim\big(\text{ Im}(f)\big)$$

Remarque

Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E : $\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
Alors :

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) &= \dim\big(\text{Im}(f)\big) \\ &= \dim\Big(\text{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))\Big) \\ &= \text{rg}\,\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) \end{aligned}$$

IV.2.b) Théorème du rang

Théorème 16.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On suppose E de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1) *Le sous-espace vectoriel* $\text{Ker}(f)$ *admet un supplémentaire dans E qui est isomorphe à* $\text{Im}(f)$. *Autrement dit :*

$$\boxed{\exists G \subset E,\ E = \text{Ker}(f) \oplus G \quad \textit{où} \quad \dim(G) = \dim\big(\text{ Im}(f)\big)}$$

(on a même : $f(G) = \text{Im}(f)$)

2) *On en déduit :*

$$\boxed{\begin{aligned} \dim(E) &= \dim\big(\text{Ker}(f)\big) + \dim\big(\text{Im}(f)\big) \\ &= \dim\big(\text{Ker}(f)\big) + \text{rg}(f) \end{aligned}}$$

Démonstration.

- Comme $\left|\begin{array}{l} \times\ \text{Ker}(f) \text{ sev de } E \\ \times\ E \text{ de dimension finie} \end{array}\right.$, alors $\text{Ker}(f)$ est un espace vectoriel de dimension finie notée r ($\leqslant \dim(E) = n$).
On note alors $\mathscr{B}_K = \big(e_1, \ldots, e_r\big)$ une base de $\text{Ker}(f)$.
En particulier, $\big(e_1, \ldots, e_r\big)$ est une famille libre de E.
On la complète en une base $\mathscr{B} = \big(e_1, \ldots, e_r, u_1, \ldots, u_{n-r}\big)$ de E.
- Démontrons alors que $\mathcal{F} = \Big(f(u_1), \ldots, f(u_{n-r})\Big)$ est une base de $\text{Im}(f)$:

$\times$ démontrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r}$.
Supposons : $\lambda_1 \cdot f(u_1) + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot f(u_{n-r}) = 0_F$.
Alors : $f\big(\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r}\big) = 0_F$.
Ainsi, $\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r} \in \text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$.
On en conclut qu'il existe $\big(\alpha_1, \ldots, \alpha_r\big) \in \mathbb{R}^r$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r} \ = \ \alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_r \cdot e_r$$

Autrement dit :

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \alpha_r \cdot e_r \ - \ \lambda_1 \cdot u_1 - \ldots - \lambda_{n-r} \cdot u_{n-r} \ = \ 0_E$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, c'est en particulier une famille libre et on en conclut :

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$$

Ainsi : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$ et $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.

$\times$ démontrons que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\text{Im}(f)$.
Il suffit de remarquer que comme $\mathscr{B}$ est une base de E :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_r), f(u_1), \ldots, f(u_{n-r})) \\ &= \text{Vect}\,(0_F, \ldots, 0_F, f(u_1), \ldots, f(u_{n-r})) \\ &= \text{Vect}\,(f(u_1), \ldots, f(u_{n-r})) \\ &= \text{Vect}\,(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

- En notant $G = \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_{n-r})$, on a démontré :
  - $E = \text{Ker}(f) \oplus G$,
    (puisque $\mathscr{B} = \big(e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_{n-r}\big)$ est une base de E).
  - de plus :

$$\begin{array}{rcll} \dim(G) & = & \text{Card}\,\big(u_1, \dots, u_{n-r}\big) & \\ & = & n-r & \\ & = & \text{Card}\,\big(f(u_1), \dots, f(u_{n-r})\big) & \\ & = & \dim\Big(\text{Im}(f)\Big) & \textit{(car } \mathcal{F} \textit{ est une base de } \text{Im}(f)\textit{)} \end{array}$$

□

Remarque

- Il faut bien lire ce théorème. En aucun cas il ne stipule que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires. Pour une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$, une telle affirmation n'a pas de sens. Si $\text{Ker}(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de E, $\text{Im}(f)$ en revanche est un sous-espace vectoriel de F.
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $\text{Im}(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
  L'écriture $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ est alors parfois vérifiée. C'est le cas en particulier pour les projecteurs (applications qui vérifient $p \circ p = p$). On peut d'ailleurs caractériser les applications pour lesquelles cette décomposition est réalisée. On peut par exemple démontrer :

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \;\Leftrightarrow\; \text{Ker}(f) = \text{Ker}\,\big(f^2\big)$$

Exercice

L'appli dérivée de $\mathbb{K}_3[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$.

b. Déterminer le noyau.

c. En déduire la dimension de $\text{Im}(\Phi)$.

d. Vérifier que $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{K}_2[X]$.

IV.2.c) Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité par détermination du rang

Théorème 17.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- *f est injective* $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(E)$.
- *f est surjective* $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(F)$.

Démonstration.
Application directe du théorème du rang. □

Théorème 18 (Caractérisation des isomorphismes)**.**

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \textit{ est bijective} \;\Leftrightarrow\; f \textit{ est injective} \;\Leftrightarrow\; f \textit{ est surjective}}$$

$$\boxed{f \textit{ est bijective} \;\Leftrightarrow\; \text{Ker}(f) = \{0_E\} \;\Leftrightarrow\; \text{rg}(f) = \dim(F)}$$

Dans ce cas, f est un isomorphisme de E vers F.

Exercice

1. L'application linéaire :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c, a+d, b-c, c) \end{array} \right.$$

est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?

2. Notons $E = \mathbb{K}[X]$ et φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi : P \mapsto XP(X)$.

a) Démontrer que φ est injective.

b) L'application φ est-elle surjective ?

IV.3. Formes linéaires et hyperplans

Rappel

- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de dimension $\dim(E) - 1$.
- De manière générale, on appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de codimension 1. Autrement dit, F est un hyperplan de E si :
  - × F est un sous-espace vectoriel de E,
  - × il existe G, sous-espace vectoriel de E **de dimension** 1, tel que :

$$E = F \oplus G$$

(ou encore s'il existe $u \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = F \oplus \text{Vect}(u)$)

IV.3.a) Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie.

- Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

IV.3.b) Caractérisation des hyperplans de E en dimension finie

Théorème 19.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit H un sous-espace vectoriel de E.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi \in \big(\mathscr{L}(E, \mathbb{K})\big) \setminus \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}\},\ H = \text{Ker}(\varphi)}$$

2. *Soient $\varphi_1 \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et $\varphi_2 \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ deux formes linéaires.*
On suppose que ces formes linéaires sont non nulles.

$$\boxed{\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{K}^*,\ \varphi_1 = a \cdot \varphi_2}$$

(autrement dit, deux formes linéaires définissent le même hyperplan ssi elles sont colinéaires)

Démonstration.

1. ($\Rightarrow$) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H.
C'est une famille libre de H et donc de E, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E. Notons alors $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ la forme linéaire définie par :

$$\varphi(e_1) = 0, \dots, \varphi(e_{n-1}) = 0, \varphi(e_n) = 1$$

Alors : $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$.

($\Leftarrow$) Le théorème du rang montre que le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E.

2. ($\Rightarrow$) On suppose $\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_2)$. Comme φ_1 est une forme linéaire non nulle, alors $\text{Ker}(\varphi_1)$ est un hyperplan de E. C'est donc un espace vectoriel de dimension $n-1$ dont on note $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_{n-1})$ une base. On complète cette famille $\mathcal{F}$ en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E. Par hypothèse :

$$\text{Ker}(\varphi_1) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \text{Ker}(\varphi_2)$$

Ainsi, pour $i \in \{1, 2\}$: $\varphi_i(e_1) = \ldots = \varphi(e_{n-1}) = 0$.
Comme les deux formes linéaires sont non nulles, alors il existe $c \neq 0$ et $d \neq 0$ tels que : $\varphi_1(e_n) = c$ et $\varphi_2(e_n) = d$. On a alors : $\varphi_1 = \frac{c}{d} \cdot \varphi_2$.

($\Leftarrow$) Sens clair. □

IV.3.c) Équations d'un hyperplan dans une base

Théorème 20.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}$ une base de E.

1. *Les hyperplans de E sont les parties de E définies par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées des vecteurs de E dans la base $\mathscr{B}$.*

Autrement dit, pour tout hyperplan H de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, un n-uplet différent de $(0, \dots, 0)$ tel que :

$$H = \left\{ x \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n \ = \ 0 \text{ où } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K} \\ \text{sont les coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathscr{B} \end{array} \right\}$$

2. *Deux telles équations définissent le même hyperplan ssi elles sont proportionnelles.*

Démonstration.
C'est l'interprétation matricielle du corollaire précédent. □

Exemple

1. L'ensemble $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
Il s'écrit naturellement comme le noyau de la forme linéaire :

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_1 + x_2 + x_3 \end{array}$$

2. $\mathscr{S}_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \mid a_{1,2} = a_{2,1} \right\} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} & \mapsto & a_{1,2} - a_{2,1} \end{array}$$

3. $\mathbb{K}_{n-1}[X] = \{a_1 P_0 + \ldots + a_n P_n \mid a_n = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque

- L'ensemble :

$$\mathscr{S}_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \mid a_{1,2} = a_{2,1} \text{ et } a_{1,3} = a_{3,1} \text{ et } a_{2,3} = a_{3,2} \right\}$$

`N'`est `PAS` un hyperplan de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.
Ce sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ s'écrit comme intersection de trois hyperplans :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{S}_3(\mathbb{K}) & = & \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid a_{1,2} = a_{2,1} \right\} \\ & \cap & \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid a_{1,3} = a_{3,1} \right\} \\ & \cap & \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid a_{2,3} = a_{3,2} \right\} \end{array}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ de dimension $9 - 3 = 6$.

- De manière générale, si :
  × E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
  × F un sous-espace vectoriel de E défini par un système de $k \in [\![1, n]\!]$ équations linéaires sur les coordonnées des vecteurs de E dans $\mathscr{B}$,

  alors : $\dim(F) = \dim(E) - \begin{pmatrix} \text{nombre d'équations linéairement} \\ \text{indépendantes} \end{pmatrix}$

- En particulier, si φ_1, ..., φ_k, sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$:

$$F \ = \ \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_k)$$

alors : $\dim(F) = \dim(E) - k$.

V. Représentations matricielles de vecteurs et d'applications linéaires

V.1. Matrice colonne associée à un vecteur

V.1.a) Définition

Définition *Matrice colonne associée à un vecteur*

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

- Soit $x \in E$. Il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x \; = \; x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p$$

  La base $\mathscr{B}_E$ étant fixée, le vecteur x est entièrement déterminé par la donnée du p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$, que l'on nomme **coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}_E$**.

- Le vecteur x admet alors naturellement une représentation matricielle.
  Il s'agit du vecteur colonne :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

  On parle alors de **vecteur (ou matrice) colonne associé à x dans la base $\mathscr{B}$**. Dans la suite, on notera :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exercice

On note $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$. Plus précisément :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = X \quad \text{et} \quad P_2(X) = X^2$$

On note $\mathscr{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$ la famille de vecteurs définie par :

$$R_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2$$

On considère : $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. ***a)*** Quel est le vecteur colonne associé à P_0 dans la base $\mathscr{B}_1$?
Même question pour P_1 et P_2.

b) Quel est le vecteur colonne associé à T dans la base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{K}_2[X]$?

2. ***a)*** Démontrer que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

b) Quel est le vecteur colonne associé à R_0 dans la base $\mathscr{B}_2$?
Même question pour R_1 et R_2.

c) Quel est le vecteur colonne associé à P dans la base $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{K}_2[X]$?

V.1.b) Isomorphisme de représentation

Théorème 21.

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ & & x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Remarque

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ fixée, ce résultat signifie que :
  - × tout vecteur x possède une unique représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}_E$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la représentation matricielle d'un unique vecteur de E.
    (c'est le caractère bijectif)
- Évidemment, si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases différentes de E, on obtient généralement des représentations matricielles $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x)$ différentes pour x.

V.1.c) Matrice de passage

Définition

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = ({e_1}', \dots, {e_p}')$ deux bases de E.

- On appelle **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la matrice :

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}({e_1}') \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}({e_n}')\big)}$$

  Autrement dit, la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à ${e_j}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice

On considère de nouveau $\mathscr{B}_1 = (P_0, P_1, P_2)$ et $\mathscr{B}_2 = (R_0, R_1, R_2)$.
On note $T(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. Déterminer la matrice de passage P de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.

2. Déterminer la matrice de passage Q de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}_1$.

3. ***a)*** Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_2$.

b) Déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_1$ à l'aide de la formule de changement de base.

c) Écrire alors la formule de chagement de base permettant de déterminer la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_2$ connaissant la matrice colonne associée à T dans la base $\mathscr{B}_1$.

Démonstration.

1. Exprimons les vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

× $R_0 = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(R_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $R_1 = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(R_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $R_2 = 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$

Donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(R_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Exprimons les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

× $P_0 = 1 \cdot R_0 + 0 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

Donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $P_1 = -1 \cdot R_0 + 1 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

Donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $P_2 = 1 \cdot R_0 + 2 \cdot R_1 + 1 \cdot R_2$

Donc $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a) Comme $T = -4 \cdot R_0 + -3 \cdot R_1 + 2 \cdot R_2$:

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(T) = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) On écrit :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(T) &= P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(T) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) On écrit :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(T) &= P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(T) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Attention, il s'agit bien de $X = PX'$ et non pas $\cancel{X' = PX}$!

Remarque

- On peut dégager de cette formule une règle d'écriture : les bases en regard de deux objets successifs doivent être les mêmes.
- Plus précisément :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

- Dans l'exemple, on démontre que :

$$P_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1} = (P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2})^{-1}$$

Cette propriété est toujours vérifiée (*cf* théorème suivant).
Dans les énoncés, il est souvent demandé d'exhiber la matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ puis de calculer $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$. On peut obtenir cette matrice en déterminant $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. Généralement, on applique plutôt la méthode du pivot de Gauss pour obtenir $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$.

Théorème 22.

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

Soit $x \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

1. $\boxed{X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \ X'}$ *ou encore* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \ = \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)}$

2. $\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}}$

3. *La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et :* $\boxed{(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$

Démonstration.

1. • Soit $x \in E$. On note $(x_1, \ldots, x_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ et $(x'_1, \ldots, x'_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Autrement dit :

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_p \cdot e_p \\ \text{et} \ x & = & x'_1 \cdot {e_1}' + \ldots + x'_p \cdot {e_p}' \end{array}$$

• Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, chaque vecteur ${e_j}'$ se décompose de manière unique sur cette base. On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{array}{rcl} {e_1}' & = & r_{11} \cdot e_1 + \ldots + r_{p1} \cdot e_p \\ \vdots & & \vdots \\ {e_p}' & = & r_{1p} \cdot e_1 + \ldots + r_{pp} \cdot e_p \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} x & = & \quad x'_1 \cdot (r_{11} \cdot e_1 + \ldots + r_{p1} \cdot e_p) \\ & & + \ \ldots \\ & & + \ x'_p \cdot (r_{1p} \cdot e_1 + \ldots + r_{pp} \cdot e_p) \\ & = & \quad (r_{11} \ x'_1 + \ldots + r_{1p} \ x'_p) \cdot e_1 \\ & & + \quad \ldots \\ & & + \ (r_{p1} \ x'_1 + \ldots + r_{pp} \ x'_p) \cdot e_p \end{array}$$

• Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) & = & \begin{pmatrix} r_{11} \ x'_1 + \ldots + r_{1p} \ x'_p \\ \vdots \\ r_{p1} \ x'_1 + \ldots + r_{pp} \ x'_p \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & \ldots & r_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} = P\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P \ X' \end{array}$$

2. Soit $x \in E$.
On note : $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ et $X'' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}''}(x)$.
D'après le théorème précédent :

× $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \ X'$

× $X' = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} \ X''$

On en déduit que : $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \ X' = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} \ X''$.
Toujours d'après le théorème précédent : $X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} \ X''$. On en déduit :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} \ X'' \ = \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} \ X''$$

Et donc : $(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} - P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) \ X''$.
Ceci étant vrai pour tout X'', on en conclut que :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} - P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = 0$$

3. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
D'après la theorem précédente : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
Or $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n$ car cette matrice est obtenue en concaténant les vecteurs colonnes associées à e_j dans la base $\mathscr{B}$ et que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible d'inverse $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. □

V.2. Matrice associée à une application linéaire

V.2.a) Définition

Définition

Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

On suppose que F est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** la matrice :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_1)\big) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_p)\big)\Big)}$$

  Autrement dit, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.
- Lorsque $E = F$, on considère généralement la même base $\mathscr{B}_E$ de départ et d'arrivée. On note alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$ en lieu et place de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_E}(f)$.
  On obtient alors une matrice carrée d'ordre p.

Remarque

- Une application $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par sa valeur sur une base de E c'est-à-dire par les valeurs :

$$f(e_1), \ f(e_2), \dots, \ f(e_p)$$

  Il apparaît donc logique que la matrice représentative de f soit déterminée par les matrices représentatives de chacun des vecteurs.
- Dans l'exemple fondamental du début de chapitre, on a démontré que les seules applications linéaires de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'écrivent naturellement à l'aide d'une matrice.

  On peut généraliser cette propriété au cas où des applications linéaires de E dans F où :
  - × E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$,
  - × F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

  L'espace vectoriel E (respectivement F) s'injecte naturellement dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) par l'isomorphisme de représentation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.)$ (respectivement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(.)$).
  On obtient alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(.) \\ \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & M \times X \end{array}$$

  où $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$.
- Ainsi, « les applications linéaires de E, de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, dans F, de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, sont, à isomorphismes de représentation près, les matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ».
- En particulier, étudier les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, c'est étudier les matrices carrées d'ordre n.

Exercice

On considère les endomorphismes φ et ψ suivantes.

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi & : & \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_3[X] \\ & & P & \mapsto & P'(X) \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} \psi & : & \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_3[X] \\ & & P & \mapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array}$$

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.

1. Déterminer la matrice représentative de φ dans la base $\mathscr{B}$.

2. Déterminer la matrice représentative de ψ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

2) Écrire la matrice C de φ dans la base canonique

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Démonstration.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(E_{1,1}) & \varphi(E_{1,2}) & \varphi(E_{2,1}) & \varphi(E_{2,2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{array}$$

□

Exercice
Soit J une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = M + \mathrm{tr}(M)\, J$$

1. a) Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M) \end{array}$ est linéaire.

b) Déterminer une base du noyau de l'application tr.
Vérifier : $\dim\big(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})\big) = 3$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Vérifier : $(A - I_4)^2 = 0$ où I_4 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

c) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

`À RETENIR`

Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$, on calcule simplement l'image par f de chaque vecteur de la base $\mathscr{B}_E$.

V.2.b) Matrice associée à un endomorphisme dans une autre base

Théorème 23.

Soit E un ev de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $N = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

1. *Alors :*

$$\boxed{M = P\ N\ P^{-1}}$$

ce qui signifie :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}}$$

2. *De manière générale :*

Les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables	$\Leftrightarrow$	*M et N sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes*

Démonstration.
Soit $u \in E$. On considère $v = f(u)$ et on note :

$$U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \quad V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \quad P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$
$$U' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) \quad V' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v)$$

Avec ces notations :

$$\begin{aligned}
& v = f(u) \\
\Leftrightarrow\ & V = M\ U && \textit{(écriture de l'égalité sous forme matricielle dans la base } \mathscr{B}\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & P\ V' = MP\ U' \\
\Leftrightarrow\ & V' = P^{-1}MP\ U' \\
\Leftrightarrow\ & N\ U' = P^{-1}MP\ U'
\end{aligned}$$

En effet : $V' = N\ U'$ (cela correspond à l'écriture matricielle de $v = f(u)$ dans la base $\mathscr{B}'$). On a donc démontré :

$$(P^{-1}MP - N)\ U' \ = \ 0$$

Ceci étant vrai pour tout U', on en déduit que $P^{-1}MP - N = 0$. □

Remarque
On peut retenir cette formule sous la forme :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$$

que l'on peut rapprocher une nouvelle fois de la relation de Chasles.

V.2.c) Isomorphisme de représentation

Théorème 24. *Isomorphisme de représentation matricielle*

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

1) Les applications :

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_{p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f) \end{cases}$$

sont des isomorphismes.

2) En particulier, on a :

$$\boxed{\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(\mathscr{L}(E)) = p^2}$$

Remarque

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, ce résultat signifie que :
  - × toute application linéaire f possède une unique représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une unique application linéaire φ.
    (c'est le caractère bijectif)
- En plus d'être une application bijective, φ est linéaire. Ainsi, la matrice d'une combinaison linéaire d'applications est la combinaison linéaire des matrices des applications.
  Plus précisément, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda_1 f + \lambda_2 g) \;=\; \lambda_1 \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \lambda_2 \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$$

V.3. Lien entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices associées

V.3.a) Noyau d'une application linéaire via la matrice associée

Théorème 25.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Soient $x \in E$ et $y \in F$.

1.
$$\boxed{\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(x)\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{aligned}}$$

2. En particulier : $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) = 0}$

Démonstration.

1.

2. • Soit $x \in E$. On note $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Alors} \quad x & = & x_1 \cdot e_1 & + & \dots & + & x_p \cdot e_p \\ \text{et} \quad f(x) & = & x_1 \cdot f(e_1) & + & \dots & + & x_p \cdot f(e_p) \end{array}$$

Les coordonnées de x étant connues, le vecteur $f(x)$ est entièrement déterminé par l'image de la base $(e_1, \dots, e_p)$ par la fonction f.

• Comme $\mathscr{B}_F$ est une base de F, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, le vecteur $f(e_j)$ se décompose de manière unique sur cette base.
On note comme suit les décompositions obtenues :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11} \cdot f_1 + \dots + a_{n1} \cdot f_n \\ \vdots & & \qquad \vdots \\ f(e_p) & = & a_{1p} \cdot f_1 + \dots + a_{np} \cdot f_n \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x_1 \cdot (a_{11} \cdot f_1 + \ldots + a_{n1} \cdot f_p) \\ & + & \ldots \\ & + & x_p \cdot (a_{1p} \cdot f_1 + \ldots + a_{np} \cdot f_p) \\ & = & (a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1p}\ x_p) \cdot f_1 \\ & + & \ldots \\ & + & (a_{n1}\ x_1 + \ldots + a_{np}\ x_p) \cdot f_p \end{array}$$

- Alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) & = & \begin{pmatrix} a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1p}\ x_p \\ a_{21}\ x_1 + \ldots + a_{2p}\ x_p \\ \vdots \\ a_{n1}\ x_1 + \ldots + a_{np}\ x_p \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \end{array}$$

□

Remarque
Il est fréquent qu'une application linéaire f soit donnée seulement par sa matrice dans certaines bases. Lorsque l'on doit calculer $f(x)$, on doit alors jongler avec les notations.

Exercice (`EDHEC 2016`)
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$.
Dans la suite, on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}^3$.
On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On note : $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$.
On pose enfin : $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.

2. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{K}^3$.

3. Vérfier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont égaux à 2.

V.3.b) Composée d'applications linéaires et produit matriciel

Théorème 26.

Soient E, F, et G des vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de E, F, et G.

1) *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$:*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)}$$

(la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées)

2) *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}\big(f^k\big) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)\big)^k}$$

(où l'on a noté $f^k = f \circ \ldots \circ f$)

Théorème 27.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1) $\boxed{f \text{ est bijective } \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est inversible}}$

2) *Si f est bijective alors :* $\boxed{\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f^{-1}\big)}$

Remarque

- Lorsqu'on dispose d'un endomorphisme et de sa matrice dans une base, pour savoir si l'endomorphisme est bijectif, il suffit de déterminer si sa matrice représentative est inversible.
- On pourra notamment penser à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer si A est inversible.

V.4. Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de la matrice associée

Théorème 28.

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f))}$$

Démonstration.
Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Il reste alors à démontrer :

$$\mathrm{rg}\Big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\Big) = \mathrm{rg}\Big(\mathrm{Mat}(f(e_1)), \ldots, \mathrm{Mat}(f(e_n))\Big)$$

□

Théorème 29.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{A \text{ est inversible} \Leftrightarrow A \text{ est la matrice associée à un isomorphisme}}$$

VI. Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

VI.1. Définition

Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^{r+1}$ tel que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k \; X^k$$

1) Cas des endomorphismes

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k f^k$.

C'est un polynôme d'endomorphimsmes.

2) Cas des matrices carrées

On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k A^k$.

C'est un polynôme de matrices.

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f))$$

Exemple

Considérons $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Notons $P(X) = X^2 - 2X$. On a alors :

$$P(f) = f^2 - 2f \quad \text{et} \quad P(A) = A^2 - 2A$$

- Notons $Q(X) = X^2 - 2X + 3$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} Q(f) & = & f^2 - 2f + 3f^0 \\ & = & f^2 - 2f + 3\mathrm{id}_E \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} Q(A) & = & A^2 - 2A + 3A^0 \\ & = & A^2 - 2A + 3I_n \end{array}$$

Pour déterminer $P(f)$ (resp. $P(A)$), il suffit de remplacer l'indéterminée X par f (resp. par A). Il faut cependant faire attention : cette stratégie ne fonctionne que si l'on considère que le terme constant du polynôme est le coefficient devant X^0.

- Notons $R(X) = (X - 1)(-2 + 3X^2)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} R(f) & = & (f - f^0)(-2f^0 + 3f^2) \\ & = & (f - \mathrm{id}_E)(-2\mathrm{id}_E + 3f^2) \end{array}$$

Et :

$$\begin{array}{rcl} R(A) & = & (A - A^0)(-2A^0 + 3A^2) \\ & = & (A - I_n)(-2I_n + 3A^2) \end{array}$$

- Enfin, si $T(X) = 0$ alors :

$$T(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad T(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

VI.2. Composée de polynômes d'endomorphismes

Théorème 30.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$.

1) *Cas des endomorphismes*

$$\boxed{(PQ)(f) \;=\; P(f) \circ Q(f) \;=\; Q(f) \circ P(f)}$$

2) *Cas des matrices carrées*

$$\boxed{(PQ)(A) \;=\; P(A) \times Q(A) \;=\; Q(A) \times P(A)}$$

Lien entre les deux
Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$(PQ)(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f) \circ Q(f))$$

VI.3. Polynômes annulateurs

Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1) Cas des endomorphismes
On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Remarque
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ est une base de l'ev E (de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$).
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors :

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Leftrightarrow\; P(A) = 0$$

(via la passerelle endomorphisme-matrice)

- On en déduit que :

P est un polynôme annulateur de f	$\Leftrightarrow$	P est un polynôme annulateur de A

Exemple
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 et vérifier que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.

Démonstration.

1) Calculons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix},\ 2A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ -3I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et on a bien $A^2 + 2A - 3I = 0$.

2) L'égalité $A^2 + 2A - 3I = 0$ entraîne $\dfrac{1}{3}(A + 2I)\ A = I$.

On en déduit que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A + 2I)$. □

Remarque

- Il est classique de démontrer le caractère inversible d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur. La méthode précédente fonctionne si le polynôme annulateur étudié P a un terme constant non nul.
- Si une matrice A possède un polynôme annulateur, alors elle en possède une infinité. Reprenons l'exemple précédent et considérons le polynôme $Q(X) = (X - 7)\ (X^2 + 2X - 3)$. Alors Q est un polynôme annulateur :
$$Q(A) = (A - 7\ I)\ (A^2 + 2A - 3\ I) = 0$$
- De manière générale, tout polynôme :
$$R_\beta(X) = (X - \beta)\ (X^2 + 2X - 3)$$
est alors un polynôme annulateur de A.

VI.4. Existence d'un polynôme annulateur non nul

Théorème 31.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) *Cas des endomorphismes*
Il existe un polynôme annulateur **non nul** *de f.*

2) *Cas des matrices carrées*
Il existe un polynôme annulateur **non nul** *de A.*

Démonstration.
Considérons la famille $(A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{n^2})$.
Cette famille contient $n^2 + 1$ éléments dans l'ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie n^2. On en déduit que cette famille est liée.
Il existe donc un $(n^2 + 1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tel que :

$$\alpha_0\ A^0 + \ldots + \alpha_{n^2}\ A^{n^2}\ =\ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$$

Le polynôme P défini par $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \alpha_k\ X^k$ est donc un polynôme annulateur non nul de A. □

VII. Matrices carrées par blocs et sous-espaces stables

VII.1. Matrices carrées par blocs

VII.1.a) Définition

Définition

- On appelle matrice carrée **par blocs** toute matrice A de la forme :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overset{n_1}{\longleftrightarrow} & \overset{n_2}{\longleftrightarrow} & \cdots & \overset{n_p}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,p} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \\ \updownarrow n_2 \\ \vdots \\ \updownarrow n_p \end{array}$$

où
  - $(n_1, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$
  - $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!],\ A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$

  En particulier, les matrices diagonales qui apparaissent dans cette écriture sont carrées ($\forall i \in [\![1,p]\!],\ A_{i,i} \in \mathscr{M}_{n_i,n_i}(\mathbb{K})$).
- Une telle matrice est notée : $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.
  C'est une matrice carrée : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $n = n_1 + \cdots + n_p$.
- Une matrice carrée par blocs est dite :
  - triangulaire supérieure **par blocs** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!],\ \Big(i > j \ \Rightarrow\ A_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})}\Big)$$

  - triangulaire inférieure **par blocs** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!],\ \Big(i < j \ \Rightarrow\ A_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})}\Big)$$

  - diagonale **par blocs** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!],\ \Big(i \neq j \ \Rightarrow\ A_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})}\Big)$$

Remarque

- Toute matrice carrée peut s'écrire comme matrice carrée par blocs. Il suffit pour cela de fixer les blocs diagonaux. Les autres blocs s'en déduisent.
- Il n'y a pas unicité de la décomposition par blocs.

$$I_3 = \left(\begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right) = \left(\begin{array}{|c|cc|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right)$$

- La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure par blocs.

VII.1.b) Manipulation des matrices par blocs

Théorème 32.

Soient $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ deux matrices carrées par blocs de mêmes tailles.

Combinaisons linéaires et produits de matrices par blocs.

1) $\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K},\ \lambda \cdot A + \mu \cdot B = \Big(\lambda \cdot A_{i,j} + \mu \cdot B_{i,j}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}}$

2) $\boxed{AB = (C_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \text{ où : } \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!],\ C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times B_{k,j}}$

3) En particulier, si A et B sont triangulaires (resp. diagonales) par blocs alors :
  - *pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$ est triangulaire (resp. diagonales) par blocs.*
  - *$A \times B$ est triangulaire (resp. diagonale) par blocs.*

  Dans le cas du produit de deux matrices triangulaires A et B (resp. diagonales) par blocs, les blocs diagonaux de $A \times B$ sont les produits des blocs diagonaux de A et B.

Cas des matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Cas des matrices triangulaires inférieures :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \cdots & (*) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \cdots & (*) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \cdots & (*) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Cas des matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{B_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 \times B_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2 \times B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p \times B_p} \end{pmatrix}$$

Remarque

On peut généraliser la notion de matrice par blocs et les calculs par blocs au cas des matrices non carrées en prenant des « découpages » différents selon les lignes et selon les colonnes. Le calcul par blocs d'un produit AB est alors licite dès que le découpage des colonnes de A est le même que le découpage des lignes de B.

VII.2. Sous-espace stable par un endomorphisme

VII.2.a) Définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

- On dit que F est **stable** (ou **stabilisé**) par f si $f(F) \subset F$.
  Autrement dit : $\boxed{F \text{ est stable par } f \ \Leftrightarrow\ \forall x \in F,\ f(x) \in F}$.
- Si f stabilise F, la restriction de f à F est à valeurs dans F.
  On appelle alors **endomorphisme induit** par f sur F la restriction de f à F au départ et à l'arrivée. Plus précisément, il s'agit de l'application :

$$f\|_F \ : \begin{array}{rcl} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple

1. La dérivation $P \mapsto P'$ dans $\mathbb{R}[X]$ stabilise tous les sous-espaces $\mathbb{R}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}$. Ce n'est pas le cas de la multiplication $P \mapsto QP$ par un polynôme Q de degré $\geqslant 1$.

2. La transposition $M \mapsto {}^tM$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stabilise les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, mais pas les sous-espaces $\mathcal{T}_n^{\pm}(\mathbb{K})$.

Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit p un projecteur de E.

On note $\mathcal{C}(p) = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ p = p \circ f\}$ le *commutant* de p.

1. Montrer : $f \in \mathcal{C}(p) \Leftrightarrow f$ stabilise $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

2. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(p)$ lorsque E est de dimension finie.

VII.2.b) Quelques sous-espaces stables en général

Théorème 33.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$.

Sous-espaces stables d'un endomorphisme

1) Les sous-espaces $\{0_E\}$, E, $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par f.

2) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\boxed{\operatorname{Ker}\big(P(f)\big) \text{ et } \operatorname{Im}\big(P(f)\big) \text{ sont stables par } f}$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\boxed{\operatorname{Ker}\big(f - \lambda\,\mathrm{id}_E\big) \text{ est stable par } f}$

Stabilité de l'ensemble des endomorphismes qui stabilisent un sous-espace de E

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

F est stable par f et g	$\Rightarrow$	• $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, *$F$ est stable par $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$* • *$F$ est stable par $f \circ g$ et $g \circ f$*

Sous-espaces stables de deux endomorphismes qui commutent

Les endomorphismes f et g commutent	$\Rightarrow$	• $\operatorname{Ker}(f)$ *et* $\operatorname{Im}(f)$ *sont stables par g* • $\operatorname{Ker}(g)$ *et* $\operatorname{Im}(g)$ *sont stables par f*

VII.3. Caractérisations de la stabilité d'un sous-espace en dimension finie

VII.3.a) Matrice par blocs d'un endomorphisme qui stabilise un espace

Théorème 34.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E dont la dimension est notée $p \in \mathbb{N}^*$.
Notons $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base (ou une famille génératrice) de F.

Notons enfin $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_{n-p})$ une base de E obtenue par complétion de la base $\mathscr{B}_F$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1.
$$\boxed{\begin{aligned} F \text{ est stable par } f \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in F,\ f(x) \in F \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![1, p]\!],\ f(e_k) \in F \end{aligned}}$$

2.
$$\boxed{F \text{ est stable par } f \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right) \text{ où } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})}$$

De plus, dans ce cas, A est la matrice de l'endomorphisme induit $f\|_F$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

Démonstration.
Le sens direct de 1 est évident, et la réciproque se prouve par linéarité. Le point 2 s'en déduit. □

VII.3.b) Généralisation : matrice dans une base adaptée à des supplémentaires stables

Théorème 35.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient F_1, …, F_p des sous-espaces supplémentaires de E.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ on note $\mathscr{B}_i$ une base de F_i.
On note alors $\mathscr{B}$ la base obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_1$, …, $\mathscr{B}_p$.
(la base $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Pour tout } k \in [\![1,p]\!],\\ \textit{l'espace } F_k \textit{ est stable par } f\end{array} \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & \boxed{A_p} \end{pmatrix}}$$

où : $\forall k \in [\![1,p]\!],\ A_k = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_k}\left(f\,||_{F_k}\right) \in \mathscr{M}_{\dim(F_k)}(\mathbb{K})$

Démonstration.

1. Conséquence directe de 34 (1er ou 2nd point).
2. Conséquence du 2nd point de 34
(ou de l'équivalence $f(\operatorname{Ker}(\varphi)) \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$ ssi $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset \operatorname{Ker}(\varphi \circ f)$ et du résultat sur la colinéarité des formes linéaires).

□

VII.3.c) Illustration classique : le cas des projections et symétries

(i) Projecteurs et symétrie : définition

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).
Ainsi, tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de E et d'un élément de F.
On note alors $(x_F, x_G) \in F \times G$ l'unique couple de vecteurs tel que $x = x_F + x_G$.

1) On appelle alors projection sur F parallèlement à G, l'endomorphisme p :

$$p : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

2) On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'endomorphisme s :

$$s : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

(ii) Caractérisation des projecteurs et symétries

Théorème 36.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Propriété caractéristique

1)
$$\boxed{\begin{array}{lcl} p \textit{ est un projecteur de } E & \Leftrightarrow & p \circ p = p \\ & \Leftrightarrow & E = \ker(p - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(p) \end{array}}$$

Dans ce cas, p est le projecteur sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

2)
$$\boxed{\begin{array}{lcl} s \textit{ est une symétrie de } E & \Leftrightarrow & s \circ s = \mathrm{id}_E \\ & \Leftrightarrow & E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \end{array}}$$

Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Caractérisation par matrice représentative

1) $\boxed{\begin{array}{c} p \text{ est un} \\ \text{projecteur de } E \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \textit{Il existe une base } \mathscr{B} \textit{ de } E \\ \textit{telle que } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right) \end{array}}$

En particulier, si p *est un projecteur :* $\boxed{\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)}$.

La base $\mathscr{B}$ *est obtenue par concaténation :*

× *d'une base de* $\mathrm{Im}(p)$ *(de dimension notée* n_1*),*

× *et d'une base de* $\mathrm{Ker}(p)$.

2) $\boxed{\begin{array}{c} s \text{ est une} \\ \text{symétrie de } E \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \textit{Il existe une base } \mathscr{B} \textit{ de } E \\ \textit{telle que } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & -I_{n_2} \end{array}\right) \end{array}}$

La base $\mathscr{B}$ *est obtenue par concaténation :*

× *d'une base de* $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ *(de dimension notée* n_1*).*

× *et d'une base de* $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ *(de dimension notée* n_2*).*

Exemple

Soit $f \in (E)$.

1. Soit $v \in E$ non nul.
La droite $\mathrm{Vect}\,(v)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle.
L'hyperplan $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

VIII. Trace et déterminant des endormophismes et matrices carrées

VIII.1. Trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

Théorème 37.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Cas des matrices carrées

- *On appelle* **trace** *de la matrice carrée A, et on note* $\mathrm{tr}(A)$*, le scalaire obtenu par somme des coefficients diagonaux de A :* $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
- *On définit alors l'application* tr *qui à chaque matrice carrée associe sa trace.*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{tr} & : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & & A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$$

1. *L'application* $\mathrm{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$*, est une forme linéaire non nulle.*

2. $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)}$

3. $\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)}$

Cas des endomorphismes

- *On appelle* **trace** *de f, et on note* $\mathrm{tr}(f)$*, la trace de la matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ *où $\mathscr{B}$ est une base de E. Le résultat ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. En effet, si $\mathscr{B}'$ est une base de E :*

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) &= \mathrm{tr}\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right) \end{aligned}$$

1. *L'application* $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbb{K}$*, est une forme linéaire non nulle.*

2. $\boxed{\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E),\ \mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)}$

Exemple

Si $E = E_1 \oplus E_2$, calculer la trace de la projection p sur E_1 parallèlement à E_2, et de la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

VIII.2. Déterminant (rappels)

VIII.2.a) Définition

Définition
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **déterminant** et on note det : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'unique application qui vérifie les propriétés suivantes *(existence et unicité sont admises)* :

- det est n-linéaire relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- det est alternée relativement aux colonnes (resp. lignes) des matrices.
- $\det(I_n) = 1$.

VIII.2.b) Calcul en pratique du déterminant d'une matrice

Théorème 38.
Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriétés usuelles

1) $\boxed{\det\left({}^tA\right) = \det\left(A\right)}$

2) $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det\left(\lambda \cdot A\right) = \lambda^n\ \det(A)}$

3) $\boxed{\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \times \det(B)}$

Formules explicites (cas $n \leqslant 2$ - cas triangulaire) et cas des matrices non inversibles

1) $$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}}$$

2) Si A est triangulaire (ou diagonale), alors $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

3) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ *A est non inversible*
$\Leftrightarrow$ *Il existe une relation de dépendance linéaire entre les colonnes (resp. lignes) de A*

En particulier :

- *si A a une colonne (resp. ligne) nulle, alors* $\det(A) = 0$.
- *si A possède deux lignes (resp. colonnes) colinéaires, alors* $\det(A) = 0$.
- *si l'une des colonnes (resp. lignes) de A s'exprime comme combinaison linéaire des autres colonnes de A (resp. lignes), alors* $\det(A) = 0$.

On en déduit aussi : $\boxed{\det(A) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ A \text{ est inversible}}$

De plus, dans le cas où A est inversible : $\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \left(\det(A)\right)^{-1}}$

Développement par rapport à une ligne/colonne (si $n \geqslant 2$)
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, on appelle mineur de position (i,j) et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant sa ligne i et sa colonne j.

1) Développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\ a_{i,k} \times \Delta_{i,k}(A)}$$

2) Développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\ a_{k,j} \times \Delta_{k,j}(A)}$$

Opérations élémentaires sur les lignes/colonnes et déterminant
Pour calculer un déterminant d'une matrice carrée d'ordre supérieur à 3, on place un maximum de 0 (en procédant par opérations élémentaires) sur une ligne (resp. colonne) et on développe par rapport à celle-ci. On rappelle que :

- multiplier une ligne/colonne de A par α multiplie son déterminant par α.
- échanger deux lignes/colonnes de A multiplie son déterminant par -1.
- ajouter à une ligne/colonne de A une combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes/colonnes de A ne modifie pas son déterminant.

Remarque

- La notion de déterminant n'est définie que pour les matrices carrées.
- Comme écrit ci-dessus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, le mineur d'ordre n de la matrice A (noté $\Delta_{i,j}(A)$) est le déterminant de la matrice obtenu par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Autrement dit, c'est le déterminant ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemple

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

VIII.2.c) Déterminant d'une famille de vecteur et déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Théorème 39.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$.

Cas des familles de vecteurs

- *On appelle* **déterminant** *de la famille $(u_1, \dots, u_n)$* **dans la base** *$\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$, le déterminant de la matrice* **carrée** *:*

$$\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_n)\Big)$$

(matrice obtenue par concaténation des matrices représentatives des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans la base $\mathscr{B}$)

1) $\boxed{\begin{array}{l} \text{Une famille } (u_1, \dots, u_n) \in E^n \text{ est une base de } E \\ \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \end{array}}$

2) En particulier, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Cas des endomorphismes

- *On appelle* **déterminant** *de f, noté $\det(f)$, le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans la base $\mathscr{B}$. Le résultat ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. En effet, si $\mathscr{B}'$ est une base de E :*

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)) &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) \times \det\left(P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)) \\ &= \det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\right) \times \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)) \\ &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)) \qquad \textit{(car } P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = I_n\textit{)} \end{aligned}$$

1) $\boxed{\det(\mathrm{id}_E) = 1}$

2) $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det\big(\lambda \cdot f\big) = \lambda^n\ \det(f)}$

3) $\boxed{\det(g \circ f) = \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)}$

4) $\boxed{f \textit{ est un automorphisme de } E \ \Leftrightarrow\ \det(f) \neq 0}$

Si f est bijective, on a alors : $\boxed{\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}}$

Remarque

- det n'est pas linéaire : $\det(\lambda A + B) \neq \lambda \det(A) + \det(B)$ en général.
- Si s une symétrie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & -I_{n_2} \end{array}\right)$.
  On en conclut :
  $$\det(s) = (-1)^{n_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_2 = \dim\left(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)\right) \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n_2 = \dim\left(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)\right) \text{ est impair} \end{cases}$$

VIII.2.d) Déterminant d'une matrice triangulaire (resp. diagonale) par blocs

Théorème 40.

1) *Le déterminant d'une matrice triangulaire (resp. diagonale) par blocs, le déterminant est le produit des déterminants des matrices (carrées) apparaissant dans la diagonale.*

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (*) & \cdots & (*) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (*) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (*) & \ldots & (*) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{p} \det\left(A_k\right)$$

2) **Application : déterminant d'un endomorphisme qui stabilise des sous-espaces supplémentaires**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces supplémentaires de E.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, notons $\mathscr{B}_i$ une base de F_i.
Notons alors $\mathscr{B}$ la base obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$.
(la base $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On suppose que f stabilise les sous-espaces $F_1, \ldots, F_P$.

$$\boxed{\det(f) \ = \ \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) \ = \ \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & \boxed{A_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \ldots & (0) & \boxed{A_p} \end{vmatrix} \ = \ \prod_{k=1}^{p} \det\left(A_k\right)}$$

où : $\forall k \in [\![1, p]\!],\ A_k = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_k}\Big(f\|_{F_k}\Big) \in \mathscr{M}_{\dim(F_k)}(\mathbb{K})$

L'endomorphisme f est bijectif
$\Leftrightarrow$ $\det(f) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\forall k \in [\![1, p]\!],\ \det(A_k) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ $\forall k \in [\![1, p]\!]$, *l'endormorphisme $f\|_{A_k}$ est bijectif*

`À RETENIR`

- Le déterminant d'une matrice (carrée) triangulaire par blocs apparaît comme une généralisation de la formule permettant le calcul d'une matrice carrée triangulaire.
- On retiendra que c'est `LA SEULE FORMULE` utilisable pour un calcul de déterminant par blocs.
  Toute autre tentative de généralisation est `À PROSCRIRE`.
  Une formule inventée sera forcément fausse et risque en plus de faire apparaître des déterminants non valides (on ne peut calculer le déterminant d'une matrice non carrée !).

Exemple

1. Montrer que $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto P(X+1)$ réalise un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Si $E = E_1 \oplus E_2$, calculer le déterminant de la projection p sur E_1 parallèlement à E_2, et de la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

VIII.2.e) Illustration : déterminant de Vandermonde

Théorème 41.

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

En particulier ce déterminant est non nul si et seulement si les a_i sont deux à eux distincts.