CH XV : Équations différentielles

I. Généralités

I.1. Solution d'une équation différentielle

Définition

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit F une application de $\mathbb{R} \times \big(\mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})\big)^{p+1}$ dans $\mathbb{K}$.

- On appelle **équation différentielle d'ordre** p une équation fonctionnelle de la forme :
$$F\big(t, y, y', \ldots, y^{(p)}\big) \ = \ 0 \qquad (E)$$
- On dit de plus que cette équation est :
  × **linéaire** si la fonction F est linéaire en les variables y, y', $\ldots$, $y^{(p)}$, c'est-à-dire si l'équation (E) s'écrit sous la forme :
$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y_1(t) + a_0(t)\, y_0(t) \ = \ b(t) \qquad (L)$$
  où :
    × les fonctions a_0, $\ldots$, a_p sont continues sur I,
    × la fonction a_p n'est pas la fonction nulle,
    × la fonction b est continue sur I et est appelée **second membre** de l'équation différentielle (L).

  On écrira aussi cette équation fonctionnelle sous la forme :
$$a_p\, y^{(p)} + a_{p-1}\, y^{(p-1)} + \cdots + a_1\, y_1 + a_0\, y_0 \ = \ b$$
  × **linéaire à coefficients constants** si les fonction a_0, $\ldots$, a_p définies précédemment sont constantes sur I. On écrit alors l'équation différentielle sous la forme :
$$a_p\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) \ = \ b(t)$$
  × **homogène** lorsque son second membre est nul, c'est-à-dire si la fonction b est la fonction nulle.
  Lorsque le second membre de (L) n'est pas nul, on appelle **équation différentielle homogène associée à** (L) l'équation obtenue en remplaçant la fonction b par la fonction nulle :
$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y_1(t) + a_0(t)\, y_0(t) \ = \ 0 \qquad (H)$$
- Une **solution** de l'équation (E) est un couple (J, y) où :
  × l'ensemble J est un intervalle de $\mathbb{R}$,
  × la fonction y est de classe $\mathscr{C}^p$ sur J et vérifie (E) pour tout $t \in J$.
- On appelle **trajectoire** de (E) la courbe représentative d'une des solutions de (E).
- On appelle **équilibre** de (E) une solution constante de (E). On parle aussi de solution **stationnaire**.

Exemples

- L'équation $t\, y^{(3)}(t) + 2\, \mathrm{e}^t\, y'(t) - y(t) \ = \ 2\,|t|$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 3. Son équation homogène associée est $t\, y^{(3)}(t) + 2\, \mathrm{e}^t\, y'(t) - y(t) \ = \ 0$.
- L'équation $3\, y^{(3)}(t) + 2\, y'(t) - y(t) \ = \ 2\,|t|$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 3 à coefficients constants. Son équation homogène associée est $3\, y^{(3)}(t) + 2\, y'(t) - y(t) \ = \ 0$.
- L'équation $t\, y^{(3)}(t) + 2\, \mathrm{e}^t\, y'(t) - y^5(t) \ = \ 2\,|t|$ est une équation différentielle non linéaire d'ordre 3. Son équation homogène associée est $t\, y^{(3)}(t) + 2\, \mathrm{e}^t\, y'(t) - y^5(t) \ = \ 0$.
- L'équation $2\, \mathrm{e}^t\, y'(t) - y(t) \ = \ 2\,|t|$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Son équation homogène associée est $2\, \mathrm{e}^t\, y'(t) - y(t) \ = \ 0$.

Remarque
A priori, les questions d'existence et d'unicité de solutions n'est pas trivial. On verra dans le cours quelques théorèmes positifs à ce sujet. Une autre question sera de trouver *explicitement* des (les/la) solution(s).

I.2. Problème de Cauchy

Définition

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $t_0 \in I$.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$.

Un **problème de Cauchy** est la donnée :

× d'une équation différentielle d'ordre p :

$$F\big(t, y, y', \dots, y^{(p)}\big) \ = \ 0$$

× de p **conditions initiales** de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(t_0) & = & \alpha_0 \\ y'(t_0) & = & \alpha_1 \\ & \vdots & \\ y^{(p-2)}(t_0) & = & \alpha_{p-2} \\ y^{(p-1)}(t_0) & = & \alpha_{p-1} \end{array}\right.$$

Remarque
On verra, dans le cadre d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2, que les problèmes de Cauchy admettent en général une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Exemples

Les problèmes suivants sont de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2t\, y' - 3y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{100} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y' - 2\,\mathrm{e}^t\, y = 5 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

Les problèmes suivants ne sont pas de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2t\, y' - 3y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y' - 2\,\mathrm{e}^t\, y = 5 \\ y^2(0) = 1 \end{array}\right.$$

Remarque
Des conditions supplémentaires un peu différentes peuvent se poser, comme le problème suivant, sur un segment $[0, T]$:

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + \lambda\, y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(T) = 0 \end{array}\right.$$

Ce type de problème avec conditions « aux bords » est plus délicat. Nous n'énoncerons pas de théorèmes généraux dans ce cas.

I.3. Cas des équations linéaires

Théorème 1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit (H) une équation différentielle **linéaire** *homogène d'ordre p.*

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) définies sur un même intervalle I (non vide et non réduit à un point) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^p(I, \mathbb{K})$.

Démonstration.

Soit (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre p définie sur I par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \ = \ 0$$

- Tout d'abord, par définition des solutions d'une équation différentielle d'ordre p : $\mathcal{S}_H \subset \mathscr{C}^p(I, \mathbb{K})$.
- Ensuite : $0_{\mathscr{C}^p(I,\mathbb{K})} \in \mathcal{S}_H$ (la fonction nulle est bien solution de (H)).
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(f, g) \in \big(\mathcal{S}_H\big)^2$.
  - × On commence par remarquer : $\lambda\, f + \mu\, g \in \mathscr{C}^p(I, \mathbb{K})$.
  - × De plus, pour tout $t \in I$:

$$\begin{array}{rll}
& \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, (\lambda\, f + \mu\, g)^{(k)}(t) & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, \big(\lambda\, f^{(k)} + \mu\, g^{(k)}\big)(t) & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
= & \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, \big(\lambda\, f^{(k)}(t) + \mu\, g^{(k)}(t)\big) & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } t\textit{)} \\
= & \lambda \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, f^{(k)}(t) + \mu \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, g^{(k)}(t)\big) & \\
= & \lambda \times 0 + \mu \times 0 \ = \ 0 & \textit{(car } f \textit{ et } g \textit{ sont solutions de } (H)\textit{)}
\end{array}$$

Ainsi, $\lambda\, f + \mu\, g$ est solution de H. Autrement dit : $\lambda\, f + \mu\, g \in \mathcal{S}_H$.

□

Remarque

Pour démontrer ce théorème, on peut aussi remarquer que l'application L suivante est linéaire :

$$\begin{array}{rccl} L & : & \mathscr{C}^p(I, \mathbb{K}) & \to \ \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K}) \\ & & y & \to \ \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, y^{(k)}(t) \end{array}$$

De plus : $\mathcal{S}_H = \mathrm{Ker}(L)$. Ainsi, $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Théorème 2.

Soit (L) une équation différentielle **linéaire** *définie sur un intervalle I, non vide et non réduit à un point. On note (H) son équation différentielle linéaire homogène associée.*

Soit f_0 une **solution particulière** *de (L) sur I.*

L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_L$ de l'équation L est alors :

$$\{h + f_0 \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

On retiendra :

solution générale de (L)	=	*solution générale de (H)*	+	*solution particulière de (L)*

Démonstration.
Soit (L) l'équation différentielle linéaire d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ définie sur I par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \;=\; b(t)$$

On note (H) son équation différentielle linéaire homogène associée.
Soit $f \in \mathscr{C}^p(I, \mathbb{K})$.

$$\begin{array}{cll}
& f \in \mathcal{S}_L & \\
\Leftrightarrow & \forall t \in I,\ \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, f^{(k)}(t) = b(t) & \\
\Leftrightarrow & \forall t \in I,\ \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, f^{(k)}(t) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, f_0^{(k)}(t) & \textit{(car } f_0 \textit{ solution de } (L)\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \forall t \in I,\ \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, f^{(k)}(t) - \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, f_0^{(k)}(t) = 0 & \\
\Leftrightarrow & \forall t \in I,\ \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, \big(f^{(k)}(t) - f_0^{(k)}(t)\big) = 0 & \\
\Leftrightarrow & \forall t \in I,\ \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, (f - f_0)^{(k)}(t) = 0 & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
\Leftrightarrow & f - f_0 \in \mathcal{S}_H & \\
\Leftrightarrow & \exists h \in \mathcal{S}_H,\ f - f_0 = h & \\
\Leftrightarrow & \exists h \in \mathcal{S}_H,\ f = f_0 + h &
\end{array}$$

Ainsi, on obtient bien : $\mathcal{S}_L = \{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$. □

`MÉTHODO` **Résolution d'une équation différentielle linéaire (EDL)**

Pour trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle **linéaire** :

1) on résout l'équation homogène associée. On note $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble de ses solutions.

2) on recherche d'une solution particulière de l'équation complète. On note cette fonction g.

3) on obtient des solutions de l'EDL complète :

$$\mathcal{S} \;=\; \{h + g \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

Pour le point ***2)***, on se réfèrera aux méthodes de recherche d'une solution partiuclière des sections suivantes dans le cas des EDL d'ordre 1 et 2.

Exemple
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y' - 3\,y = 1$.

Théorème 3 (Principe de superposition)**.**
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soient (L_1) et (L_2) des équations différentielles **linéaires** *d'ordre p définies sur un intervalle I, non vide et non réduit à un point, par :*

$$\sum_{k=0}^{p} a_k(t)\, y^{(k)}(t) \;=\; b_1(t) \qquad (L_1)$$
$$\sum_{k=0}^{p} a_k(t)\, y^{(k)}(t) \;=\; b_2(t) \qquad (L_2)$$

Soient f_1 et f_2 des fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \textit{ solution de } (L_1) \\ f_2 \textit{ solution de } (L_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \textit{Pour tout } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \\ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \textit{ solution de} \\ \sum\limits_{k=0}^{p} a_k(t)\, y^{(k)}(t) = \lambda_1\, b_1(t) + \lambda_2\, b_2(t) \end{array}$$

Démonstration.
Supposons que :

× la fonction f_1 est solution de (L_1),

× la fonction f_2 est solution de (L_2).

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $t \in I$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{p} a_k(t) \left(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\right)^{(k)}(t) & \\
= \ & \sum_{k=0}^{p} a_k(t) \left(\lambda_1 f_1^{(k)} + \lambda_2 f_2^{(k)}\right)(t) & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{p} a_k(t) \left(\lambda_1 f_1^{(k)}(t) + \lambda_2 f_2^{(k)}(t)\right) & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } t\textit{)} \\
= \ & \lambda_1 \sum_{k=0}^{p} a_k(t)\, f_1^{(k)}(t) + \lambda_2 \sum_{k=0}^{p} a_k(t)\, f_2^{(k)}(t) & \\
= \ & \lambda_1 \times b_1(t) + \lambda_2 \times b_2(t) & \textit{(car } f_1 \textit{ solution de } (L_1) \textit{ et } f_2 \textit{ solution de } (L_2)\textit{)}
\end{aligned}$$

On obtient bien que la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de l'équation :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \ = \ \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

□

> Ne pas inventer de théorème !
> Dans ce théorème, les équations différentielles linéaires (L_1) et (L_2) ont les mêmes fonctions coefficients a_0, a_1, …, a_p. Seuls les seconds membres diffèrent.

MÉTHODO **Utilisation du principe de superposition**

Soit (L) une équation différentielle **linéaire** d'ordre p de la forme :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b(t)$$

Supposons que le second membre b de l'équation (L) s'écrit sous la forme :

$$b \ = \ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n$$

Alors, pour chercher une solution particulière de (L) :

1) on détermine une solution particulière f_1 de l'EDL (L_1) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_1(t)$$

2) on détermine une solution particulière f_2 de l'EDL (L_2) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_2(t)$$

⋮

⋮

n) on détermine une solution particulière f_n de l'EDL (L_n) définie par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = b_n(t)$$

$(\star)$ Par principe de superposition, l'EDL (L) admet pour solution particulière la fonction f définie par :

$$f \ = \ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n$$

II. Équations différentielles linéaires du premier ordre

II.1. Équation homogène

Théorème 4.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.
On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :

$$y'(t) + a(t)\, y(t) \;=\; 0$$

Alors :

$$\boxed{y \text{ solution de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y : t \mapsto \lambda\, e^{-A(t)}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, e^{-A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Démonstration.

- Remarquons d'abord que, puisque la fonction a est continue I, elle admet bien une primitive A (de classe $\mathscr{C}^1$ sur I).
- Soit $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$. On note z la fonction définie par :

$$z \;:\; \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & y(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} \end{array}$$

  La fonction z est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I en tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. De plus, pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} + y(t) \times A'(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} \\ &= y'(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} + a(t)\, y(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} \\ &= \big(y'(t) + a(t)\, y(t)\big)\, \mathrm{e}^{A(t)} \end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (H) \\ \Leftrightarrow\ & \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)\, y(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \forall t \in I,\ \big(y'(t) + a(t)\, y(t)\big)\, \mathrm{e}^{A(t)} = 0 \quad \textit{(car : } \forall t \in I,\ \mathrm{e}^{A(t)} \neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow\ & \forall t \in I,\ z'(t) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ z(t) = \lambda \\ \Leftrightarrow\ & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ y(t)\, \mathrm{e}^{A(t)} = \lambda \\ \Leftrightarrow\ & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall t \in I,\ y(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)} \\ \Leftrightarrow\ & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)} \end{aligned}$$

□

Remarque
Pour retrouver rapidement ce résultat, on pourra raisonner au brouillon sans rigueur (méthode autrement appelée « à la physicienne »).

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (H) \ &\Leftrightarrow\ y' + a\, y = 0 \\ &\Leftrightarrow\ y' = -a\, y \\ &\Leftrightarrow\ \frac{y'}{y} = -a && \textit{(en supposant : } \forall t \in I,\ y(t) \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\ \exists \mu \in \mathbb{K},\ \ln\big(y\big) = -A + \mu && \textit{(en primitivant l'égalité précédente)} \\ &\Leftrightarrow\ \exists \mu \in \mathbb{K},\ y(t) = \mathrm{e}^{-A(t)+\mu} = \mathrm{e}^{\mu}\, \mathrm{e}^{-A(t)} \\ &\Leftrightarrow\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)} \end{aligned}$$

Corollaire 1 (Cas particulier où a est constante)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $a \in \mathbb{K}$.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants sur I définie par :

$$y'(t) + a\,y(t) \;=\; 0$$

Alors :

$$\boxed{y \text{ solution de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K},\ y : t \mapsto \lambda\, e^{-a\,t}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, e^{-a\,t} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}}$$

Exercice 1

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = 0$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = ay$ avec pour condition initiale : $y(0) = 1$.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - t\,y = 0$.

Démonstration.

1) L'équation $y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2) Comme ce problème comporte une condition initiale, on raisonne en deux temps.

- L'équation $y' - a\,y = 0$, notée (H) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{a\,t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Soit f une solution de (H).
  D'après le point précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{a\,t}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} f \text{ vérifie la condition initiale } y(0) = 1 & \Leftrightarrow & f(0) = 1 \\ & \Leftrightarrow & \lambda\,\mathrm{e}^{a \times 0} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \end{array}$$

  On en déduit que l'unique solution de (H) avec pour condition initiale $y(0) = 1$ est la fonction :

$$t \mapsto \mathrm{e}^{a\,t}$$

3) L'équation $y' - t\,y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'odre 1. L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$\square$

II.2. Solution particulière

II.2.a) Solutions remarquables, lorsque a est constante

Soit $a \in \mathbb{K}$.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant suivante :

$$y'(t) + a\,y(t) \;=\; b(t)$$

On souhaite déterminer une solution particulière de cette équation.

Si $t \mapsto b(t)$ est de la forme...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ constante	$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ constante
$t \mapsto P_n(t)$, P_n polynôme de degré n	$t \mapsto Q_n(t)$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n, $\alpha \neq -a$	$t \mapsto Q_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{-a\,t}$, P_n polynôme de degré n	$t \mapsto t\,Q_n(t)\,\mathrm{e}^{-a\,t}$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto \lambda\,\cos(\alpha\,t) + \mu\,\sin(\alpha\,t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$	$t \mapsto \tilde{\lambda}\,\cos(\alpha\,t) + \tilde{\mu}\,\sin(\alpha\,t)$, $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in \mathbb{K}^2$

Exercice 2
Trouver une solution particulère, sur $\mathbb{R}$, des équations différentielles :

1. (E_1) $y' + y = \mathrm{e}^t$ ***2.*** (E_2) $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$

Démonstration.

1. Résolvons (E_1).

- On commence par résoudre son équation homogène associée $y' + y = 0$ que l'on note (H_1).
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
  L'ensemble de ses solutions est donc :
  $$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1).
  Comme le second membre de (E_1) est $t \mapsto \mathrm{e}^t$, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^t$ solution de (E_1).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^t$.
  La fonction h est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + h(t) = \mathrm{e}^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\,\mathrm{e}^t + \lambda\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ 2\lambda\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\Leftrightarrow 2\,\lambda = 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^t \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
  Ainsi la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E_1).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2. Résolvons (E_2).

- On commence par résoudre son équation homogène associée $y' + y = 0$ que l'on note (H_2).
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
  L'ensemble de ses solutions est donc :
  $$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_2).
  Comme le second membre de (E_1) est $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda\, t\, \mathrm{e}^{-t}$ solution de (E_2).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h : t \mapsto \lambda\, t\, \mathrm{e}^{-t}$. La fonction h est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + h(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\, \mathrm{e}^{-t} + \cancel{\lambda\, t \times (-\mathrm{e}^{-t})} + \cancel{\lambda\, t\, \mathrm{e}^{-t}} = \mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\, \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \quad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t} \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

  Ainsi la fonction $h : t \mapsto t\, \mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de (E_2).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_2) est :
$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} + t\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

II.2.b) Méthode de la variation de la constante

$\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$ **Méthode de la variation de la constante**

Pour déterminer une solution **particulière** d'une équation différentielle linéaire (L) d'ordre 1 $y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)$ définie sur I, on peut appliquer la méthode dite de la variation de la constante.
Pour cela, on suit les étapes suivantes.

1) On détermine les solutions de l'équation homogène associée à (L) :
$$\{t \mapsto \lambda\, y_H(t) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$
où $y_H = t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ avec A une primitive de a sur I.

2) On cherche une solution particulière de (L) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\, y_H(t)$.

  a) Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$. On note alors $h : t \mapsto \lambda(t)\, y_H(t)$.
  La fonction h est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

  b) On raisonne ensuite par équivalence.
$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (L) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + a(t)\, h(t) = b(t) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = \cdots = g(t) \end{aligned}$$
  La fonction λ cherchée peut cherchée parmi les primitives de g.

  c) On détermine de manière explicite une primitive de g sur I.
  Notons-la G.

  d) Une solution particulière de (L) est alors : $t \mapsto G(t)\, y_H(t)$.

□ **Exercice 3**
Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle : (E) $t\, y'(t) + y(t) = t\, \mathrm{e}^{t^2}$.

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène associée (H) $t\, y' + y = 0$.
  × Tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:
$$t\, y'(t) + y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + \frac{1}{t}\, y(t) = 0$$

× L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\ln(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \;=\; \{t \mapsto \frac{\lambda}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  On applique la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$.
  Soit $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On note alors $h : t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$. La fonction h est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} h \text{ est solution de } (E) \;&\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\; t\,h'(t) + h(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\; t\left(\frac{\lambda'(t)}{t} - \frac{\lambda(t)}{t^2}\right) + \frac{\lambda(t)}{t} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\; \lambda'(t) - \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} + \cancel{\frac{\lambda(t)}{t}} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\ &\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\; \lambda'(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \end{aligned}$$

  On choisit donc la fonction λ parmi les primitives de $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{t^2}$.
  La fonction $\lambda : t \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t^2}$ convient.
  Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2}$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

II.3. Problème de Cauchy

Théorème 5. (Problème de Cauchy d'ordre 1)
Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point :

$$y' + a(t)\,y \;=\; b(t)$$

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)\,y &= b(t) \\ y(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Exercice 4
Trouver la solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = \mathrm{ch}$ telle que $y(0) = 0$.
On rappelle que la fonction ch *est définie par* $\mathrm{ch} : t \mapsto \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Démonstration.

- L'équation $y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche une solution particulière de (E).
  Comme le second membre de (E) est une combinaison linéaire, on cherche :
  × une solution particulière h_1 de (E_1) $y' + y = \mathrm{e}^t$,
  × une solution particulière h_2 de (E_2) $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$.
  Par principe de superposition, la fonction $h = \dfrac{1}{2}\,h_1 + \dfrac{1}{2}\,h_2$ sera une solution particulière de (E).

× D'après l'Exercice 2 ***1.***, la fonction $h_1 : t \mapsto \frac{1}{2}\, e^t$ est une solution particulière de (E_1).

× D'après l'Exercice 2 ***2.***, la fonction $h_2 : t \mapsto t\, e^{-t}$ est une solution particulière de (E_2).

On en déduit qu'une solution particulière de (E) est $h : t \mapsto \frac{1}{4}\, e^t + \frac{1}{2}\, t\, e^{-t}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \lambda\, e^{-t} + \frac{1}{4}\, e^t + \frac{1}{2}\, t\, e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Soit f une solution de (E).
D'après le point précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f : t \mapsto t \mapsto \lambda\, e^{-t} + \frac{1}{4}\, e^t + \frac{1}{2}\, t\, e^{-t}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} f \text{ vérifie la condition initiale } y(0) = 0 & \Leftrightarrow & f(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda\, e^{-0} + \frac{1}{4}\, e^0 + \frac{1}{2} \times 0 \times e^{-0} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda + \frac{1}{4} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = -\frac{1}{4} \end{array}$$

On en déduit que l'unique solution de (E) avec pour condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction :

$$t \mapsto -\frac{1}{4}\, e^{-t} + \frac{1}{4}\, e^t + \frac{1}{2}\, t\, e^{-t}$$

□

Théorème 6.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :

$$y'(t) + a(t)\, y(t) \;=\; 0$$

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions :

$$\mathcal{S}_H \;=\; \{t \mapsto \lambda\, e^{-A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \;=\; \mathrm{Vect}\,(f)$$

où $f : t \mapsto e^{-A(t)}$.

Alors l'application Φ suivante est un isomorphisme.

$$\begin{array}{rccl} \Phi & : & \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R} \\ & & g & \mapsto & g(0) \end{array}$$

Démonstration.

- La fonction Φ est linéaire par linéarité de l'évaluation en 0.
- Montrons que Φ est surjective.
Soit $x_0 \in \mathbb{K}$.
Alors il existe une fonction g solution du problème de Cauchy d'ordre 1 suivant :
$$\left\{\begin{array}{l} \forall t \in I,\; g'(t) + a(t)\, g(t) \;=\; 0 \\ g(0) = x_0 \end{array}\right.$$
Ainsi il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $g(0) = x_0$.
Autrement dit, il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\Phi(g) = x_0$.
On en déduit que Φ est surjective.

- On sait :
  - × d'abord que Φ est linéaire,
  - × ensuite : $\dim(\mathcal{S}_H) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. En effet, la famille (f) est :
    - libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,
    - génératrice de $\mathcal{S}_H$.

    C'est donc une base de $\mathcal{S}_H$ et : $\dim(\mathcal{S}_H) = \text{Card}\big((f)\big) = 1$.
  - × enfin que Φ est surjective.

  On en déduit que Φ est bijective.

□

III. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

III.1. Équation homogène

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $a \neq 0$. Soit $d \in \mathscr{C}^0(I, K)$.
On note (E) l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants définie sur I par :

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) \; = \; d(t)$$

On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation (E) l'équation définie sur $\mathbb{K}$ par :

$$a\, r^2 + b\, r + c \; = \; 0$$

On appelle **polynôme caractéristique** associée à l'équation (E) le polynôme Q défini par :

$$Q(X) \; = \; a\, X^2 + b\, X + c$$

Exemple

1. L'équation caractéristique de l'équation $2\, y'' + 3\, y' - y = \dfrac{t^2}{2}$ est :

$$2\, r^2 + 3\, r - 1 \; = \; 0$$

Son polynôme caractéristique est $2\, X^2 + 3\, X - 1$.

2. L'équation caractéristique de l'équation $2\, y'' + 3\, y' - y = t\, \mathrm{e}^t$ est :

$$2\, r^2 + 3\, r - 1 \; = \; 0$$

Son polynôme caractéristique est $2\, X^2 + 3\, X - 1$.

3. L'équation caractéristique de l'équation $4\, y'' + 3\, y = 1$ est :

$$4\, r^2 + 3 \; = \; 0$$

Son polynôme caractéristique est $4\, X^2 + 3$.

Théorème 7.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^4$ tel que : $a \neq 0$.
On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{K}$ par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; 0$$

Trois cas se présentent.

(i) *Si l'équation caractéristique associée à (H) admet* exactement 2 solutions *r_1 et r_2 ($r_1 \neq r_2$), alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_1\,t} + \lambda_2\, e^{r_2\,t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}}$$

(ii) *Si l'équation caractéristique associée à (H) admet* exactement 1 solution *r_0, alors :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_0\,t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\,t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}}$$

(iii) *Si l'équation caractéristique associée à (H)* admet exactement 2 solutions complexes *$r_1 = \alpha + i\,\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $r_2 = \overline{r_1}$, alors, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle est :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\;\; e^{\alpha\,t}\, \cos(\beta\,t) + \lambda_2\, e^{\alpha\,t}\, \sin(\beta\,t) \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Démonstration.

(i) On procède par double inclusion.

($\supset$) On note $\mathcal{E}$ l'ensemble :

$$\mathcal{E} \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, \mathrm{e}^{r_1\,t} + \lambda_2\, \mathrm{e}^{r_2\,t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$f : t \mapsto \lambda_1\, \mathrm{e}^{r_1\,t} + \lambda_2\, \mathrm{e}^{r_2\,t}$$

En particulier, la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & \lambda_1\, r_1\, \mathrm{e}^{r_1\,t} + \lambda_2\, r_2\, \mathrm{e}^{r_2\,t} \\ f''(t) & = & \lambda_1\, r_1^2\, \mathrm{e}^{r_1\,t} + \lambda_2\, r_2^2\, \mathrm{e}^{r_2\,t} \end{array}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} & a\,f''(t) + b\,f'(t) + c\,f(t) \\ = & a\left(\lambda_1\, r_1^2\, \mathrm{e}^{r_1\,t} + \lambda_2\, r_2^2\, \mathrm{e}^{r_2\,t}\right) + b\left(\lambda_1\, r_1^2\, \mathrm{e}^{r_1\,t} + \lambda_2\, r_2^2\, \mathrm{e}^{r_2\,t}\right) + c\left(\lambda_1\, \mathrm{e}^{r_1\,t} + \lambda_2\, \mathrm{e}^{r_2\,t}\right) \\ = & \lambda_1\, \mathrm{e}^{r_1\,t}\left(a\,r_1^2 + b\,r_1 + c\right) + \lambda_2\, \mathrm{e}^{r_2\,t}\left(a\,r_2^2 + b\,r_2 + c\right) \\ = & \lambda_1\, \mathrm{e}^{r_1\,t} \times 0 + \lambda_2\, \mathrm{e}^{r_2\,t} \times 0 \qquad \textit{(car r_1 et r_2 sont solutions de l'équation caractéristique de (H))} \\ = & 0 \end{array}$$

On en déduit que f est solution de (H), c'est-à-dire : $f \in \mathcal{S}_H$.

($\subset$) Soit $f \in \mathcal{S}_H$.
On pose g la fonction définie par :

$$g : t \mapsto f(t)\, \mathrm{e}^{-r_1\,t}$$

On cherche à montrer que g est solution d'une nouvelle équation différentielle linéaire homogène.

- Tout d'abord, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- On remarque de plus :

$$f : t \mapsto g(t)\, \mathrm{e}^{r_1\,t}$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & g'(t)\, \mathrm{e}^{r_1\,t} + g(t)\, r_1\, \mathrm{e}^{r_1\,t} \;=\; \big(g'(t) + r_1\, g(t)\big)\, \mathrm{e}^{r_1\,t} \\ f''(t) & = & \big(g''(t) + r_1\, g'(t)\big)\, \mathrm{e}^{r_1\,t} + \big(g'(t) + r_1\, g(t)\big)\, r_1\, \mathrm{e}^{r_1\,t} \\ & = & \big(g''(t) + 2r_1\, g'(t) + r_1^2\, g(t)\big)\, \mathrm{e}^{r_1\,t} \end{array}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) \\ = \ & a \left(g''(t) + 2r_1\, g'(t) + r_1^2\, g(t)\right) \mathrm{e}^{r_1\, t} + b \left(g'(t) + r_1\, g(t)\right) \mathrm{e}^{r_1\, t} + c\, g(t)\, \mathrm{e}^{r_1\, t} \\ = \ & \left(a\, g''(t) + (2ar_1 + b)\, g'(t) + (ar_1^2 + b\, r_1 + c)\, g(t)\right) \mathrm{e}^{r_1\, t} \\ = \ & \left(a\, g''(t) + (2ar_1 + b)\, g'(t) + \cancel{0 \times g(t)}\right) \mathrm{e}^{r_1\, t} \quad \textit{(car } r_1 \textit{ est solution de l'équation caractéristique de } (H)\textit{)} \end{aligned}$$

Or, la fonction f est solution de (H), donc : $a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) = 0$. D'où :

$$\left(a\, g''(t) + (2ar_1 + b)\, g'(t)\right) \mathrm{e}^{r_1\, t} \ = \ 0$$

Comme $\mathrm{e}^{r_1\, t} \neq 0$ et $a \neq 0$, on obtient :

$$g''(t) + \frac{2ar_1 + b}{a}\, g'(t) \ = \ 0$$

- On en déduit que la fonction g' est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$y' + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) y \ = \ 0$$

On rappelle de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a\, t^2 + b\, t + c \ &= \ a\, (t - r_1)\, (t - r_2) \\ &= \ a \left(t^2 - (r_1 + r_2)\, t + r_1\, r_2\right) \\ &= \ a\, t^2 - a\, (r_1 + r_2)\, t + a\, r_1\, r_2 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a\, (r_1 + r_2) & = & b \\ a\, r_1\, r_2 & = & c \end{array} \right.$$

En particulier : $-(r_1 + r_2) = \dfrac{b}{a}$.
On en déduit que g' est solution de l'équation :

$$y' + \left(2r_1 - (r_1 + r_2)\right) y \ = \ 0 \text{ c'est-à-dire } y' + (r_1 - r_2)\, y \ = \ 0$$

- Il existe donc $c_1 \in \mathbb{K}$ tel que :

$$g' : t \mapsto c_1\, \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)\, t}$$

Comme $r_1 - r_2 \neq 0$, il existe $c_2 \in \mathbb{K}$ tel que :

$$g : t \mapsto -\frac{c_1}{r_1 - r_2}\, \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)\, t} + c_2$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{aligned} f(t) \ &= \ g(t)\, \mathrm{e}^{r_1\, t} \\ &= \ \left(-\frac{c_1}{r_1 - r_2}\, \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)\, t} + c_2\right) \mathrm{e}^{r_1\, t} \\ &= \ -\frac{c_1}{r_1 - r_2}\, \mathrm{e}^{r_2\, t} + c_2\, \mathrm{e}^{r_1\, t} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\lambda_1 = c_2$ et $\lambda_2 = -\dfrac{c_1}{r_1 - r_2}$, on en déduit :

$$f : t \mapsto \lambda_1\, \mathrm{e}^{r_1\, t} + \lambda_2\, \mathrm{e}^{r_2\, t}$$

On en conclut : $f \in \mathcal{E}$.

(ii) et ***(iii)*** Raisonnements similaires

□

Exercice 5
Résoudre les équations différentielles suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $y'' + 4\,y' - 5\,y = 0$ (E_1)

2. $y'' + 2\,y' + 2\,y = 0$ (E_2)

3. $y'' + y = 0$ (E_3)

Démonstration.

1. L'équation (E_1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.
Son polynôme caractéristique est $Q(X) = X^2 + 4\,X - 5 = (X-1)\,(X+5)$.
Comme Q admet exactement 2 racines réelles (1 et -5), l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-5t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. L'équation (E_2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.
Son polynôme caractéristique est $Q(X) = X^2 + 4\,X + 4 = (X+2)^2$.
Comme Q admet une unique racine (-2), l'ensemble des solutions de (E_2) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{-2t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{-2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. L'équation (E_3) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $Q(X) = X^2 + 1 = (X-i)\,(X+i)$. Comme Q admet exactement 2 racines complexes (i et $-i$), l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$\begin{aligned} & \{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{0\times t}\,\cos(1\times t) + \lambda_2\,\mathrm{e}^{0\times t}\,\sin(1\times t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ = \;& \{t \mapsto \lambda_1\,\cos(t) + \lambda_2\,\sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

□

III.2. Solution particulière

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $a \neq 0$. Soit $d \in \mathscr{C}^0(I, K)$.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; d(t)$$

On note Q son polynôme caractérisque.

Si $t \mapsto d(t)$ est de la forme...	et si...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$ constante		$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{K}$ constante
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α non racine de Q	$t \mapsto R_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α racine **simple** de Q	$t \mapsto R_n(t)\,t\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, P_n polynôme de degré n	α racine double de Q	$t \mapsto R_n(t)\,t^2\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, R_n polynôme de degré n

Exercice 6
Résoudre l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y'' - 4\,y' + 3\,y \;=\; (2t+1)\,\mathrm{e}^t$$

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène (H) associée à (E).
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $Q(X) = X^2 - 4\,X + 3 = (X-1)\,(X-3)$. Comme Q admet exactement 2 racines (1 et 3), l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  Comme le second membre de (E) est $t \mapsto (2t+1)\,\mathrm{e}^t$ et que 1 est racine simple de Q, on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto (a\,t+b)\,t\,\mathrm{e}^t$.

  Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $h : t \mapsto (at^2+bt)\,\mathrm{e}^t$.
  La fonction h est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} h'(t) & = & (2at+b)\,\mathrm{e}^t + (at^2+bt)\,\mathrm{e}^t \;=\; \big(at^2+(2a+b)t+b\big)\,\mathrm{e}^t \\ h''(t) & = & \big(2at+2a+b\big)\,\mathrm{e}^t + \big(at^2+(2a+b)t+b\big)\,\mathrm{e}^t \\ & = & \big(at^2+(4a+b)t+2a+2b\big)\,\mathrm{e}^t \end{array}$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rl} & h''(t) - 4\,h'(t) + 3\,h(t) \\ = & \big(at^2+(4a+b)t+2a+2b\big)\,\mathrm{e}^t \\ & -\; 4\,\big(at^2+(2a+b)t+b\big)\,\mathrm{e}^t \;+\; 3\,(at^2+bt)\,\mathrm{e}^t \\ = & \big(-4at+2a-2b\big)\,\mathrm{e}^t \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rll} & h \text{ solution de } (E) & \\ \Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \big(-4at+2a-2b\big)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t & \\ \Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ -4at+2a-2b = 2t+1 & \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t \neq 0\textit{)} \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} -4a & & & = & 2 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. & \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & 1 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. & \\ \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & -1 \\ & - & 2b & = & 2 \end{array}\right. & \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcr} a & = & -\dfrac{1}{2} \\ b & = & -1 \end{array}\right. & \end{array}$$

Ainsi $h : t \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\ t^2 - t\right)\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} - \left(\frac{1}{2}\ t^2 + t\right)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

III.3. Problème de Cauchy

Théorème 8. (Problème de Cauchy d'ordre 2)

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \ = \ d(t)$$

Soit $(t_0, x_0, \tilde{x}_0) \in I \times \mathbb{K}^2$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \ = \ d(t) \\ y(t_0) \ = \ x_0 \\ y'(t_0) \ = \ \tilde{x}_0 \end{cases}$$

Exercice 7

Trouver l'unique solution de l'équation (E) $y'' - 4y' + 3y = (2t+1)\,\mathrm{sh}(t)$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

On rappelle que la fonction sh *est définie par* $\mathrm{sh} : t \mapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Théorème 9.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants sur I définie par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \ = \ 0$$

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions :

× *si l'équation caractéristique associée admet exactement 2 solutions r_1 et r_2 :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \ = \ \{t \mapsto \lambda_1\, e^{r_1\,t} + \lambda_2\, e^{r_2\,t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)}$$

où $f_1 : t \mapsto e^{r_1\,t}$ et $f_2 : t \mapsto e^{r_2\,t}$.

× *si l'équation caractéristique associée admet une unique solution r_0 :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \ = \ \{t \mapsto \lambda_1\, e^{r_0\,t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\,t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)}$$

où $f_1 : t \mapsto e^{r_0\,t}$ et $f_2 : t \mapsto t\, e^{r_0\,t}$.

× *si l'équation caractéristique associée admet exactement 2 solutions complexes $r_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\overline{r_1}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ est :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H \ = \ \{t \mapsto \lambda_1\, e^{\alpha\,t}\cos(\beta\,t) + \lambda_2\, e^{\alpha\,t}\sin(\beta\,t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)}$$

où $f_1 : t \mapsto e^{\alpha\,t}\cos(\beta\,t)$ et $f_2 : t \mapsto e^{\alpha\,t}\sin(\beta\,t)$.

Alors l'application Φ suivante est un isomorphisme.

$$\Phi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{K}^2 \\ g & \mapsto & \big(g(0), g'(0)\big) \end{array}$$

En particulier, on a toujours : $\boxed{\dim\big(\mathcal{S}_H\big) = 2}$.

Démonstration.

- La fonction Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et linéarité de l'évaluation en 0.
- Montrons que Φ est surjective.
  Soit $(x_0, \tilde{x}_0) \in \mathbb{R}$.
  Alors il existe une fonction g solution du problème de Cauchy d'ordre 2 suivant :
  $$\begin{cases} \forall t \in I,\ a\, g''(t) + b\, g'(t) + c\, g(t) \ = \ 0 \\ g(0) \ = \ x_0 \\ g'(0) \ = \ \tilde{x}_0 \end{cases}$$
  Ainsi il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\big(g(0), g'(0)\big) = (x_0, \tilde{x}_0)$.
  Autrement dit, il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\Phi(g) = (x_0, \tilde{x}_0)$.
  On en déduit que Φ est surjective.
- On sait :
  - × d'abord que Φ est linéaire,
  - × ensuite : $\dim(\mathcal{S}_H) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. En effet, la famille (f) est :
    - libre car constituée de 2 vecteurs non colinéaires,
    - génératrice de $\mathcal{S}_H$.

    C'est donc une base de $\mathcal{S}_H$ et : $\dim(\mathcal{S}_H) = \text{Card}\big((f_1, f_2)\big) = 2$.
  - × enfin que Φ est surjective.

  On en déduit que Φ est bijective.

$\square$