

## CH XV : Équations différentielles

### Avant-propos

- Une équation différentielle est une équation qui relie différentes dérivées d'une fonctions. Résoudre une telle équation c'est trouver une fonction suffisamment régulière qui vérifie cette équation.
- Lorsque l'on s'intéresse à l'évolution d'une grandeur dans le temps continu, il est assez naturel de constater que cette évolution est régie par une équation différentielle. En effet, si l'évolution de cette grandeur est représentée par une fonction  $h$  (au temps  $t_0$ , cette grandeur est alors de taille  $h(t_0)$ ), alors :
  - × la fonction  $h'$  permet de connaître la vitesse d'accroissement de cette grandeur (au temps  $t_0$ , la grandeur s'accroît avec la vitesse instantannée  $h'(t_0)$ ).
  - × la fonction  $h''$  représente l'accroissement de la vitesse c'est-à-dire l'accélération (au temps  $t_0$ , l'accélération vaut  $h''(t_0)$ ).

On peut en particulier penser à l'évolution de la taille d'une population au cours du temps ou à l'évolution de la position d'un mobile de masse donnée au bout d'un ressort ou encore, en électrocinétique, à la recherche de l'intensité dans un circuit RLC.

- En réalité, les grandeurs physiques dépendent souvent de plusieurs paramètres et de nombreux phénomènes physiques sont souvent modéliser par des équations aux dérivées partielles (telle que l'équation de la chaleur). Ce point ne sera pas abordé dans ce chapitre où on se restreint à la résolution d'équations différentielles du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre.

- Si la démarche physicienne consiste initialement à établir l'équation modélisant un phénomène, la démarche mathématique consiste plutôt quant à elle à :

- × établir des méthodologies de résolution,
- × à tenter de décrire avec le maximum de précision la forme (on parle plutôt de la structure) de l'ensemble des solutions.

Si la théorie permet de démontrer l'unicité d'une solution, connaître une solution c'est alors complètement résoudre le problème. C'est tout l'intérêt de réaliser une telle étude théorique.

- Du point de vue du programme, les équations différentielles ont un intérêt particulier car elles sont reliées à plusieurs chapitres différents :
  - × les intégrales à paramètre. Il est en effet fréquent d'avoir à établir une équation différentielle satisfaite par une fonction définie par une intégrale à paramètre.
  - × les séries de fonctions et en particuliers les séries entières. Il est en effet fréquent d'avoir à chercher les solutions d'une équation différentielle sous forme de fonctions développables en séries entières.
  - × la réduction de matrices. La résolution d'un système différentiel passe par une étape de diagonalisation / trigonalisation de la matrice définissant ce système. C'est une belle illustration de ce que l'algèbre peut apporter à l'analyse et du non cloisonnement des différentes théories mathématiques.

## I. Généralités sur les équations différentielles

### I.1. Définitions sur les équations différentielles

#### Définition

Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $F$  une application de  $\mathbb{R} \times (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}))^{p+1}$  dans  $\mathbb{K}$ .

- On appelle **équation différentielle d'ordre  $p$**  une équation fonctionnelle (c'est-à-dire dont l'inconnue est une fonction  $y$ ) qui établit une égalité mettant en jeu les dérivées successives  $y, y', \dots, y^{(p)}$  de la fonction inconnue  $y$ . Formellement, on pourrait écrire cela sous la forme :

$$G(t, y, y', \dots, y^{(p)}) = b$$

Cette forme a l'avantage de bien faire apparaître les dérivées successives mais a pour gros inconvénient de faire apparaître  $G$  comme une fonction de  $p + 2$  variables supprimant ainsi le lien entre les dérivées successives. C'est pourquoi on préfère la notation suivante (même si elle « cache » la présence des dérivées successives) :

$$F(t, y) = b \quad (E)$$

- On dit de plus que cette équation est :
  - **homogène** lorsque son second membre est nul, c'est-à-dire si la fonction  $b$  est la fonction nulle.
  - **linéaire** si la fonction  $F$  est linéaire en la deuxième variable, c'est-à-dire si l'équation  $(E)$  s'écrit sous la forme :

$$a_p(t) y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t) y^{(p-1)}(t) + \dots + a_1(t) y_1(t) + a_0(t) y_0(t) = b(t) \quad (L)$$

où :

- ×  $(a_0, \dots, a_p) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}))^{p+1}$  et  $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ ,
- × les fonctions  $a_0, \dots, a_p$  sont continues sur  $I$ ,
- × la fonction  $a_p$  n'est pas la fonction nulle,
- × la fonction  $b$  est continue sur  $I$  et est appelée **second membre** de l'équation différentielle  $(L)$ .

On écrira aussi cette équation fonctionnelle sous la forme :

$$a_p y^{(p)} + a_{p-1} y^{(p-1)} + \dots + a_1 y_1 + a_0 y_0 = b$$

Lorsque le second membre de  $(L)$  n'est pas la fonction nulle, on appelle **équation différentielle homogène associée à  $(L)$**  l'équation obtenue en remplaçant la fonction  $b$  par la fonction nulle :

$$a_p(t) y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t) y^{(p-1)}(t) + \dots + a_1(t) y_1(t) + a_0(t) y_0(t) = 0 \quad (H)$$

- **linéaire à coefficients constants** si la fonction  $F$  est linéaire en la deuxième variable et si les fonctions  $a_0, \dots, a_p$  définies précédemment sont constantes sur  $I$ .
- Une **solution** de l'équation  $(E)$  est un couple  $(J, y)$  où :
  - × l'ensemble  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,
  - × la fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $J$  et vérifie  $(E)$  pour tout  $t \in J$ .
- On appelle **trajectoire** de  $(E)$  la courbe représentative d'une des solutions de  $(E)$ .
- On appelle **équilibre** de  $(E)$  une solution constante de  $(E)$ . On parle aussi de solution **stationnaire**.

### Exemples

- Le terme scalaire se réfère au fait que, pour tout  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$  la fonction  $a_i$  est à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On parle d'équations différentielles vectorielles lorsque chacune de ces fonctions  $a_i$  est à valeurs dans un espace  $\mathbb{K}^m$  (pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ).
- Le terme « linéaire » est souvent très mal compris. En particulier, il ne s'agit en aucun cas de dire que, pour tout  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$  la fonction  $a_i$  serait linéaire. Cette propriété n'est en aucun cas exigée. Pour mieux comprendre cette notion, considérons l'équation différentielle suivante :

$$\cos(t) y'' + i t^2 y - y = \sin(t) \times \ln(t) \quad (E)$$

Ici, (E) est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.

Détaillons les notations de la définition :

$$\times I = ]0, +\infty[,$$

$$\times a_2 : t \mapsto \cos(t) \text{ (n'est pas la fonction nulle), } a_1 : t \mapsto i t^2, a_0 : t \mapsto -1,$$

$$\times b : t \mapsto \sin(t) \times \ln(t),$$

$$\times F : (t, f) \mapsto \cos(t) f''(t) + i t^2 f'(t) - f(t).$$

- La fonction  $F$  définit bien l'équation différentielle (E).

Pour tout  $t \in ]0, +\infty[ :$

$$F(t, y) = b$$

$$\Leftrightarrow \cos(t) y''(t) + i t^2 y'(t) - y(t) = \sin(t) \times \ln(t) = 0$$

- La fonction  $F$  est bien linéaire en sa deuxième variable.

Soit  $t \in I$ . Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$ . Soit  $(f, g) \in (\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}))^2$ .

$$\begin{aligned} & F(t, (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)) \\ = & \cos(t) (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)''(t) + i t^2 (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)'(t) - (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t) \\ = & \lambda \left( \cos(t) f''(t) + i t^2 f'(t) - f(t) \right) \\ & + \mu \left( \cos(t) g''(t) + i t^2 g'(t) - g(t) \right) \\ = & \lambda F(t, f) + \mu F(t, g) \end{aligned}$$

- La notion d'équation différentielle est relativement large. Par exemple :

$$2y'' + i \left( \cos(y' - ty'') \right)^2 \times t e^t = 1 - \sin(t)$$

est bien une équation différentielle d'ordre 2 car c'est une équation qui relie les fonctions  $y$ ,  $y'$  et  $y''$ . Elle n'est pas linéaire.

- Résoudre une équation différentielle s'avère être un exercice ardu et il n'existe pas de technique permettant de construire une solution dans le cas général. En revanche, on est assez armé pour résoudre les équations différentielles dans les cas simples, en particulier pour les équations différentielles **linéaires** d'ordre 1 ou 2.

### I.2. Problème de Cauchy

#### Définition

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ .

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $t_0 \in I$ .

Un **problème de Cauchy** est la donnée :

- × d'une équation différentielle d'ordre  $p$  :

$$F(t, y) = b$$

- × de  $p$  **conditions initiales** de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{(p-2)}(t_0) = \alpha_{p-2} \\ y^{(p-1)}(t_0) = \alpha_{p-1} \end{array} \right.$$

### Exemples

- Les exemples ci-dessous :

$$\begin{cases} y'' + 2t y' - 3y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{100} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \exp(y') - 2e^t y = 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

définissent des problèmes de Cauchy.

- En revanche, les exemples suivants :

$$\begin{cases} y'' + 2t y' - 3y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \exp(y') - 2e^t y = 5 \\ (y(0))^2 = 1 \end{cases}$$

ne définissent pas des problèmes de Cauchy.

- S'il peut sembler naturel de vouloir résoudre un problème de Cauchy, il faut garder en tête que les problèmes physiques ne s'expriment pas tous naturellement comme un problème de Cauchy. On peut par exemple citer le cas d'un élastique de longueur  $L$  qu'on soumet à un mouvement rotatif autour d'un axe et dont les deux extrémités sont attachées en position 0 et  $L$  de cet axe. On s'intéresse alors à la position de la corde au bout d'un temps  $T$  fixé (on pourrait prendre aussi le temps en paramètre et on aurait alors affaire à une équation aux dérivées partielles). La fonction  $y$  donne la position de chaque point de la corde. Un tel problème se modélise comme suit :

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}$$

Les conditions  $y(0) = 0$  et  $y(L) = 0$  illustrent le fait que les extrémités de la corde sont fixes car attachés en 0 et en  $L$  tout au long de l'expérience. Ce type de problème n'est pas l'objet du cours.

### I.3. Cas des équations différentielles linéaires

#### Théorème 1.

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle non vide et non réduit à un point.

Soit  $(H)$  une équation différentielle **linéaire** homogène d'ordre  $p$  c'est-à-dire de la forme (pour  $(a_0, \dots, a_p) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}))^{p+1}$ ) :

$$a_p(t) y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t) y^{(p-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = 0 \quad (H)$$

L'ensemble  $\mathcal{S}_H$  des solutions de  $(H)$  définies sur l'intervalle  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ .

*Démonstration.*

Démontrons que  $\mathcal{S}_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ .

(i)  $\mathcal{S}_H \subset \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$  par définition.

(ii)  $\mathcal{S}_H \neq \emptyset$  car  $0_{\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})} \in \mathcal{S}_H$ .

En effet, la fonction nulle est de classe  $\mathcal{C}^p$  est bien solution de  $(H)$ .

(iii) Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Soit  $(f, g) \in (\mathcal{S}_H)^2$ .

× On commence par remarquer :  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ .

× De plus, pour tout  $t \in I$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p a_k(t) (\lambda f + \mu g)^{(k)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^p a_k(t) (\lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)})(t) && \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \sum_{k=0}^p a_k(t) (\lambda f^{(k)}(t) + \mu g^{(k)}(t)) && \text{(par linéarité de l'évaluation en } t) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^p a_k(t) f^{(k)}(t) + \mu \sum_{k=0}^p a_k(t) g^{(k)}(t) \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 && \text{(car } f \text{ et } g \text{ sont solutions de } (H)) \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lambda f + \mu g$  est solution de  $H$ . Autrement dit :  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_H \square$

**Remarque**

Pour démontrer ce théorème, on peut aussi remarquer que l'application  $L$  suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K}) &\mapsto \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \\ y &\rightarrow \sum_{k=0}^p a_k(t) y^{(k)}(t) \end{aligned}$$

De plus :  $\mathcal{S}_H = \text{Ker}(L)$ . Ainsi,  $\mathcal{S}_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ .

**Théorème 2.**

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle non vide et non réduit à un point.

Soit  $(L)$  une équation différentielle **linéaire** c'est-à-dire de la forme (pour  $(a_0, \dots, a_p) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}))^{p+1}$  et  $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ ) :

$$a_p(t) y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t) y^{(p-1)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = b(t) \quad (L)$$

On note  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène associée.

Soit  $f_0$  une **solution particulière** de  $(L)$  sur  $I$ .

L'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_L$  de l'équation  $(L)$  est alors :

$$\mathcal{S}_L = \{h + f_0 \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

On retiendra :

$\begin{array}{l} \text{solution générale} \\ \text{de } (L) \end{array} = \begin{array}{l} \text{solution générale} \\ \text{de } (H) \end{array} + \begin{array}{l} \text{solution particulière} \\ \text{de } (L) \end{array}$
---

*Démonstration.*

Soit  $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ .

$$f \in \mathcal{S}_L$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, \sum_{k=0}^p a_k(t) f^{(k)}(t) = b(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, \sum_{k=0}^p a_k(t) f^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^p a_k(t) f_0^{(k)}(t) \quad (\text{car } f_0 \text{ est solution de } (L))$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, \sum_{k=0}^p a_k(t) f^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^p a_k(t) f_0^{(k)}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, \sum_{k=0}^p a_k(t) (f^{(k)}(t) - f_0^{(k)}(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, \sum_{k=0}^p a_k(t) (f - f_0)^{(k)}(t) = 0 \quad (\text{par linéarité de la dérivation})$$

$$\Leftrightarrow f - f_0 \in \mathcal{S}_H$$

$$\Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{S}_H, f - f_0 = h$$

$$\Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{S}_H, f = f_0 + h$$

Ainsi, on obtient bien :  $\mathcal{S}_L = \{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$ . □

## II. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

### II.1. Résolution : aspect pratique

#### II.1.a) Résolution de l'équation homogène

##### Théorème 3.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $a$  une fonction continue sur  $I$ . Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ .

On note  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur  $I$  définie par :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

Alors :

$$y \text{ solution de } (H) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, y : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$$

Autrement dit :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

##### Corollaire 1. (cas particulier où $a$ est constante)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $a \in \mathbb{K}$ .

On note  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants sur  $I$  définie par :

$$y'(t) + a y(t) = 0$$

Alors :

$$y \text{ solution de } (H) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, y : t \mapsto \lambda e^{-at}$$

Autrement dit :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda e^{-at} \mid \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$$

#### II.1.b) Résolution avec second membre : recherche d'une solution particulière

##### Solutions remarquables, lorsque $a$ est constante

Soit  $a \in \mathbb{K}$ .

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant suivante :

$$y'(t) + a y(t) = b(t)$$

On souhaite déterminer une solution particulière de cette équation.

Si $t \mapsto b(t)$ est de la forme...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ constante	$t \mapsto \mu, \mu \in \mathbb{R}$ constante
$t \mapsto P_n(t), P_n$ polynôme de degré $n$	$t \mapsto Q_n(t), Q_n$ polynôme de degré $n$
$t \mapsto P_n(t) e^{\alpha t}, P_n$ polynôme de degré $n, \alpha \neq -a$	$t \mapsto Q_n(t) e^{\alpha t}, Q_n$ polynôme de degré $n$
$t \mapsto P_n(t) e^{-at}, P_n$ polynôme de degré $n$	$t \mapsto t Q_n(t) e^{-at}, Q_n$ polynôme de degré $n$
$t \mapsto \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$	$t \mapsto \tilde{\lambda} \cos(\alpha t) + \tilde{\mu} \sin(\alpha t), (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \in \mathbb{K}^2$

## Méthode de la variation de la constante

## MÉTHODO

## Méthode de la variation de la constante

Pour déterminer une solution **particulière** d'une équation différentielle linéaire  $(L)$  d'ordre 1  $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$  définie sur  $I$ , on peut appliquer la méthode dite de la variation de la constante.

Pour cela, on suit les étapes suivantes.

1) On détermine les solutions de l'équation homogène associée à  $(L)$  :

$$\{t \mapsto \lambda y_H(t) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où  $y_H = t \mapsto e^{-A(t)}$  avec  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ .

2) On cherche une solution particulière de  $(L)$  sous la forme  $t \mapsto \lambda(t) y_H(t)$ .

a) Soit  $\lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ . On note alors  $h : t \mapsto \lambda(t) y_H(t)$ .

La fonction  $h$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) On raisonne ensuite par équivalence.

$$h \text{ solution de } (L) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, h'(t) + a(t)h(t) = b(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = \dots = g(t)$$

La fonction  $\lambda$  cherchée peut être cherchée parmi les primitives de  $g$ .

c) On détermine de manière explicite une primitive de  $g$  sur  $I$ .

Notons-la  $G$ .

d) Une solution particulière de  $(L)$  est alors :  $t \mapsto G(t) y_H(t)$ .

## II.2. Résolution : aspect théorique

Théorème 4. (Problème de Cauchy linéaire d'ordre 1)

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle non vide et non réduit à un point.

Soit  $(E)$  une équation différentielle linéaire d'ordre 1, c'est-à-dire de la forme (pour  $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$  et  $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ ) :

$$y' + a(t)y = b(t)$$

Soit  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$ .

Il existe une unique solution au problème de Cauchy linéaire :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

## Exercice 1

Trouver la solution de l'équation différentielle  $(E)$   $y' + y = \text{ch}$  telle que  $y(0) = 0$ .

On rappelle que la fonction  $\text{ch}$  est définie par  $\text{ch} : t \mapsto \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ .

*Démonstration.*

- L'équation  $y' + y = 0$  est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche une solution particulière de  $(E)$ . Pour ce faire, on raisonne au brouillon en s'aidant du tableau fournissant une solution particulière en fonction de la forme du second membre. On démontre alors que :

× la fonction  $h_1 : t \mapsto \frac{1}{2} e^t$  est une solution particulière de  $(E_1)$ .

× la fonction  $h_2 : t \mapsto t e^{-t}$  est une solution particulière de  $(E_2)$ .

Par principe de superposition, la fonction  $h = \frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} h_2$  sera une solution particulière de  $(E)$ .

On en déduit qu'une solution particulière de  $(E)$  est  $h : t \mapsto \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{2} t e^{-t}$ .

Ainsi, l'ensemble des solutions de  $(E)$  est :

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{-t} + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{2} t e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Soit  $f$  une solution de  $(E)$ .

D'après le point précédent, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$f : t \mapsto \lambda e^{-t} + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{2} t e^{-t}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} f \text{ vérifie la condition initiale } y(0) = 0 &\Leftrightarrow f(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \dots \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que l'unique solution de  $(E)$  avec pour condition initiale  $y(0) = 0$  est la fonction :

$$t \mapsto -\frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{2} t e^{-t}$$

□

### Théorème 5.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $a$  une fonction continue sur  $I$ .

Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ .

On note  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur  $I$  définie par :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

On note  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble de ses solutions :

$$\mathcal{S}_H = \{ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{K} \} = \text{Vect}(f)$$

où  $f : t \mapsto e^{-A(t)}$ .

Alors l'application  $\Phi$  suivante est un isomorphisme.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S}_H &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto g(0) \end{aligned}$$

(on retrouve en particulier que  $\dim(\mathcal{S}_H) = \dim(\mathbb{R}) = 1$ )

Démonstration.

- La fonction  $\Phi$  est linéaire par linéarité de l'évaluation en 0.
- Montrons que  $\Phi$  est surjective.

Soit  $x_0 \in \mathbb{K}$ .

Alors il existe une fonction  $g$  solution du problème de Cauchy d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in I, g'(t) + a(t)g(t) = 0 \\ g(0) = x_0 \end{cases}$$

Ainsi il existe  $g \in \mathcal{S}_H$  tel que :  $g(0) = x_0$ .

Autrement dit, il existe  $g \in \mathcal{S}_H$  tel que :  $\Phi(g) = x_0$ .

On en déduit que  $\Phi$  est surjective.

- On sait :

× d'abord que  $\Phi$  est linéaire,

× ensuite :  $\dim(\mathcal{S}_H) = 1 = \dim(\mathbb{R})$ . En effet, la famille  $(f)$  est :

- libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,
- génératrice de  $\mathcal{S}_H$ .

C'est donc une base de  $\mathcal{S}_H$  et :  $\dim(\mathcal{S}_H) = \text{Card}((f)) = 1$ .

× enfin que  $\Phi$  est surjective.

On en déduit que  $\Phi$  est bijective. □



### III. Équations différentielles linéaires du second ordre III.1.b) Problème de Cauchy linéaire d'ordre 2

#### III.1. Résolution : aspect théorique

##### III.1.a) Forme des solutions

On a vu en début de chapitre la forme des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $p$ . On reformule ici (pour rappel) ce théorème dans le cas particulier du second ordre.

##### Théorème 6.

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle non vide et non réduit à un point.

Soit  $(L)$  une équation différentielle **linéaire** du second ordre c'est-à-dire de la forme (pour  $(a_0, a_1, a_2) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}))^3$  et  $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ ) :

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \quad (L)$$

On note  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène associée.

Soit  $f_0$  une **solution particulière** de  $(L)$  sur  $I$ .

L'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_L$  de l'équation  $(L)$  est alors :

$$\mathcal{S}_L = \{h + f_0 \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

On retiendra :

$\begin{array}{l} \text{solution générale} \\ \text{de } (L) \end{array} = \begin{array}{l} \text{solution générale} \\ \text{de } (H) \end{array} + \begin{array}{l} \text{solution particulière} \\ \text{de } (L) \end{array}$
---

##### Théorème 7. (Problème de Cauchy linéaire d'ordre 2)

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle non vide et non réduit à un point.

Soit  $(E)$  une équation différentielle linéaire d'ordre 1, c'est-à-dire de la forme (pour  $(a, b) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}))^2$  et  $c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ ) :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

Soit  $(t_0, x_0, x'_0) \in I \times \mathbb{K}$ .

Il existe une unique solution au problème de Cauchy linéaire :

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = x_0 \\ y'(t_0) = x'_0 \end{cases}$$

##### III.1.c) Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène

##### Théorème 8.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $(a, b) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}))^2$ .

On note  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sur  $I$  définie par :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On note  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble de ses solutions.

1) L'application  $\Phi$  suivante est un isomorphisme.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S}_H &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ g &\mapsto (g(0), g'(0)) \end{aligned}$$

2)  $\dim(\mathcal{S}_H) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

### III.2. Résolution : aspect pratique

#### III.2.a) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

##### Équation caractéristique

##### Définition

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que :  $a \neq 0$ . Soit  $d \in \mathcal{C}^0(I, K)$ .

On note  $(E)$  l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants définie sur  $I$  par :

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = d(t)$$

On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation  $(E)$  l'équation définie sur  $\mathbb{K}$  par :

$$a r^2 + b r + c = 0$$

On appelle **polynôme caractéristique** associée à l'équation  $(E)$  le polynôme  $Q$  défini par :

$$Q(X) = a X^2 + b X + c$$

##### Exemple

1. L'équation caractéristique de l'équation  $2y'' + 3y' - y = \frac{t^2}{2}$  est :

$$2r^2 + 3r - 1 = 0$$

Son polynôme caractéristique est  $2X^2 + 3X - 1$ .

2. L'équation caractéristique de l'équation  $2y'' + 3y' - y = t e^t$  est :

$$2r^2 + 3r - 1 = 0$$

Son polynôme caractéristique est  $2X^2 + 3X - 1$ .

3. L'équation caractéristique de l'équation  $4y'' + 3y = 1$  est :

$$4r^2 + 3 = 0$$

Son polynôme caractéristique est  $4X^2 + 3$ .

#### Résolution de l'équation homogène : recherche de fonctions à valeurs complexes

##### Théorème 9.

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  tel que :  $a \neq 0$ .

On note  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0$$

On note  $r_1$  et  $r_2$  les deux solutions de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle  $(H)$ .

Deux cas se présentent.

(i) si  $r_1 \neq r_2$ , alors :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \end{array} \right\}$$

(ii) si  $r_1 = r_2$ , alors, en notant  $r_0$  cette valeur commune :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda_1 e^{r_0 t} + \lambda_2 t e^{r_0 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \end{array} \right\}$$

## Résolution de l'équation homogène : recherche de fonctions à valeurs réelles

### Théorème 10.

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que :  $a \neq 0$ .

On note  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0$$

Trois cas se présentent.

(i) **Régime apériodique** : si l'équation caractéristique associée à  $(H)$  admet exactement 2 solutions réelles  $r_1$  et  $r_2$  ( $r_1 \neq r_2$ ), alors :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

(ii) **Régime critique** : si l'équation caractéristique associée à  $(H)$  admet exactement 1 solution réelle  $r_0$ , alors :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda_1 e^{r_0 t} + \lambda_2 t e^{r_0 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

(iii) **Régime pseudo-périodique** : si l'équation caractéristique associée à  $(H)$  n'admet pas de solution réelle, alors on note  $r_1 = \alpha + i\beta$  l'une des deux solutions complexes (et  $r_2 = \bar{r}_1$  la seconde). On obtient ainsi :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \lambda_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

De plus l'application  $\Phi$  suivante est un isomorphisme.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S}_H &\rightarrow \mathbb{K}^2 \\ g &\mapsto (g(0), g'(0)) \end{aligned}$$

En particulier, on a toujours :  $\dim(\mathcal{S}_H) = 2$ .

### Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes définies sur  $\mathbb{R}$ .

1.  $y'' + 4y' - 5y = 0$  ( $E_1$ )

2.  $y'' + 2y' + 2y = 0$  ( $E_2$ )

3.  $y'' + y = 0$  ( $E_3$ )

Démonstration.

1. L'équation ( $E_1$ ) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

Son polynôme caractéristique est  $Q(X) = X^2 + 4X - 5 = (X - 1)(X + 5)$ .

Comme  $Q$  admet exactement 2 racines réelles (1 et  $-5$ ), l'ensemble des solutions de ( $E_1$ ) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-5t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. L'équation ( $E_2$ ) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

Son polynôme caractéristique est  $Q(X) = X^2 + 4X + 4 = (X + 2)^2$ .

Comme  $Q$  admet une unique racine ( $-2$ ), l'ensemble des solutions de ( $E_2$ ) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 t e^{-2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. L'équation ( $E_3$ ) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est  $Q(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ . Comme  $Q$  admet exactement 2 racines complexes ( $i$  et  $-i$ ), l'ensemble des solutions de ( $E_3$ ) est :

$$\begin{aligned} &\{t \mapsto \lambda_1 e^{0 \times t} \cos(1 \times t) + \lambda_2 e^{0 \times t} \sin(1 \times t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{t \mapsto \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

□

**Solution particulière**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$  tel que :  $a \neq 0$ . Soit  $d \in \mathcal{C}^0(I, K)$ .

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur  $I$  par :

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = d(t)$$

On note  $Q$  son polynôme caractéristique.

Si $t \mapsto d(t)$ est de la forme...	et si...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda, \lambda \in \mathbb{K}$ constante		$t \mapsto \mu, \mu \in \mathbb{K}$ constante
$t \mapsto P_n(t) e^{\alpha t}$ , $P_n$ polynôme de degré $n$	$\alpha$ non racine de $Q$	$t \mapsto R_n(t) e^{\alpha t}$ , $R_n$ polynôme de degré $n$
$t \mapsto P_n(t) e^{\alpha t}$ , $P_n$ polynôme de degré $n$	$\alpha$ racine <b>simple</b> de $Q$	$t \mapsto R_n(t) t e^{\alpha t}$ , $R_n$ polynôme de degré $n$
$t \mapsto P_n(t) e^{\alpha t}$ , $P_n$ polynôme de degré $n$	$\alpha$ racine <b>double</b> de $Q$	$t \mapsto R_n(t) t^2 e^{\alpha t}$ , $R_n$ polynôme de degré $n$

**Exercice 3**

Résoudre l'équation différentielle  $(E)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y'' - 4y' + 3y = (2t + 1)e^t$$

*Démonstration.*

- On commence par résoudre l'équation homogène  $(H)$  associée à  $(E)$ . C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est  $Q(X) = X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$ . Comme  $Q$  admet exactement 2 racines (1 et 3), l'ensemble des solutions de  $(H)$  est :

$$\{t \mapsto \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de  $(E)$ . Comme le second membre de  $(E)$  est  $t \mapsto (2t + 1)e^t$  et que 1 est racine simple de  $Q$ , on cherche une solution de  $(E)$  sous la forme  $t \mapsto (at + b)t e^t$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On note alors  $h : t \mapsto (at^2 + bt)e^t$ .

La fonction  $h$  est bien de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} h'(t) &= (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t = (at^2 + (2a + b)t + b)e^t \\ h''(t) &= (2at + 2a + b)e^t + (at^2 + (2a + b)t + b)e^t \\ &= (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b)e^t \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &h''(t) - 4h'(t) + 3h(t) \\ &= (at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b)e^t \\ &\quad - 4(at^2 + (2a + b)t + b)e^t + 3(at^2 + bt)e^t \\ &= (-4at + 2a - 2b)e^t \end{aligned}$$

On obtient :

$h$  solution de  $(E)$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, (-4at + 2a - 2b)e^t = (2t + 1)e^t$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, -4at + 2a - 2b = 2t + 1 \quad (\text{car : } \forall t \in \mathbb{R}, e^t \neq 0)$$

$$\iff \begin{cases} -4a & = & 2 \\ 2a & - & 2b = & 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a & = & 1 \\ 2a & - & 2b = & 1 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} 2a & = & -1 \\ & - & 2b = & 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = & -\frac{1}{2} \\ & & b = & -1 \end{cases}$$

Ainsi  $h : t \mapsto \left(-\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^t$  est une solution particulière de  $(E)$ .

On en déduit que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est :

$$\left\{ t \mapsto \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t} - \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)e^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

□

### III.2.b) Recherche des solutions développables en série entière

Une équation différentielle étant donnée, on peut chercher des solutions développables en série entière.

MÉTHODO

**Déterminer les fonctions développables en série entière solutions d'une équation différentielle**

Afin de trouver les fonctions développables en série entière sur  $] -r, r[$  solutions d'une équation différentielle  $(E)$ , on suit la méthodologie suivante :

- 1) on écrit les dérivées successives de  $f$  sous forme de sommes.
- 2) on travaille alors uniquement sur la quantité à gauche du symbole d'égalité. Dans celle-ci, on développe toutes les quantités en  $x$  et on distribue sur les dérivées. Typiquement, si l'équation différentielle s'écrit :

$$x(x-1)f''(x) - f'(x) + (x-1)f(x) = 0$$

on commence à effectuer le calcul de la quantité  $x(x-1)f''(x) - f'(x) + (x-1)f(x)$  (sans écrire l'égalité à 0) et on la fait apparaître sous la forme :

$$x^2 f''(x) - x f''(x) - f'(x) + x f(x) - f(x) \quad (*)$$

- 3) on remplace les expressions  $f^{(k)}(x)$  par leurs écritures sous forme de sommes et on distribue les  $x$  dans les sommes. Par exemple,  $x^2 f'(x)$  s'écrira :

$$x^2 f'(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1}$$

- 4) à ce stade, la quantité  $(*)$  s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de sommes. Celles-ci font apparaître des puissances différentes de  $x$ . On effectue alors tous les décalages d'indices permettant de faire apparaître  $x^n$  dans chacune des sommes. Typiquement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$$

**Attention à bien modifier les indices des coefficients !**

5) on obtient alors une combinaison linéaire de sommes, faisant toutes apparaître  $x^n$  (et pas d'autres quantités en  $x$ ). Ces sommes ne commencent pas toutes au même indice. On considère alors  $m$  **le plus grand indice de début de sommation des sommes**. Les sommes qui commencent par un indice plus petit sont développées afin de ne faire apparaître que des sommes commençant en  $m$ . Typiquement, si  $m = 2$  alors la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  (si elle est présente) sera écrite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$$

6) on obtient alors des quantités isolées qu'on regroupe selon les puissances de  $x$ . Cela peut avoir une forme comme :

$$(a_0 - 2a_1) + (a_2 - a_3)x$$

Les autres quantités sont toutes regroupées au sein d'une même somme qui s'écrit sous la forme (cas  $m = 2$ ) :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n$$

À ce stade, le calcul est fini.

7) on rappelle alors que  $f$  est solution de l'équation différentielle, ce qui démontre :

$$\forall x \in ]-r, r[, (a_0 - 2a_1) + (a_2 - a_3)x + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n = 0$$

(on prend garde de bien écrire dans l'ordre croissant des puissances de  $x$  et on n'oublie pas de quantifier !)

8) on conclut alors, **par unicité du développement en série entière**

que tous les coefficients sont nuls. Dans ce qui précède, on obtient :

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \\ \forall n \geq 2, b_n = 0 \\ \text{(on n'oublie pas de quantifier !)} \end{cases}$$

Cette méthodologie peut apparaître longue. Elle l'est uniquement car elle détaille des étapes qui coulent de source. **Il est attendu que cette méthodologie soit appliquée de manière stricte, sans oubli des arguments, ce qui permettra de conclure.**

#### Exercice 4

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' - y = 0 \quad (E)$$

1. On suppose qu'il existe une fonction  $f$  solution de (E) et développable en série entière. Autrement dit, il existe une série entière  $\sum a_n x^n$ , de rayon de convergence  $R > 0$ , telle que :

×  $f$  est solution de  $E$ ,

×  $\forall x \in ]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

a) Déterminer alors une relation entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b) En déduire l'expression des termes de la suite  $(a_n)$  en fonction de  $a_0$ .

2. Réciproquement, on note  $g : x \mapsto \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ .

b) Démontrer que  $g$  est solution de l'équation différentielle (E).

*Démonstration.*

1. a) • Comme  $f$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$ . Elle est donc en particulier deux fois dérivable sur cet intervalle.

De plus, comme  $f$  est solution de (E), pour tout  $x \in ] -R, R[$  :

$$4x f''(x) + 2 f'(x) - f(x) = 0$$

- Soit  $x \in ] -R, R[$ . Calculons :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & 4x f''(x) + 2 f'(x) - f(x) \\ = & 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ = & \sum_{n=2}^{+\infty} (4n(n-1) a_n) x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n a_n) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ = & \sum_{n=1}^{+\infty} (4(n+1)n a_{n+1}) x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (2(n+1) a_{n+1}) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ = & 2a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (4(n+1)n a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n) x^n \end{aligned}$$

- Comme  $f$  est solution de (E) :

$$\forall x \in ] -R, R[, 2a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (4(n+1)n a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n) x^n = 0$$

On en déduit, par unicité du développement en série entière :

$$\begin{cases} 2a_1 - a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 4(n+1)n a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n = 0 \end{cases}$$

et donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$4(n+1)n a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n = 0$$

$$\text{donc} \quad 2(n+1)(2n+1) a_{n+1} = a_n$$

$$\text{d'où} \quad a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} a_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} a_n}$$

- b) On démontre par une récurrence immédiate :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$ .

Ainsi, pour tout  $x \in ] -R, R[$  :

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

2. a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\left| \frac{\frac{1}{(2(n+1))!}}{\frac{1}{(2n)!}} \right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$

est  $\frac{1}{0} = +\infty$ .

- b) La fonction  $g$  est bien solution de l'équation (E).  
(à vérifier par calcul)

On peut alors conclure que l'ensemble des solutions de (E) développables en

$$h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \\ \text{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

□

## IV. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

### IV.1. Définitions

#### Définition

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soient  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$ .

Soient  $b_1, \dots, b_n$  des fonctions continues sur  $I$ .

- On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** ( $E$ ) tout système d'équations différentielles de la forme, pour tout  $t \in I$  :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

d'inconnues  $x_1, \dots, x_n$  des fonctions dérivables sur  $I$ .

- Les réels  $a_{i,j}$  sont appelés **coefficients** du système linéaire.
- On peut ré-écrire ce système différentiel sous la forme, pour tout  $t \in I$  :

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

- On appelle **système différentiel homogène** associé à ( $E$ ) le système défini, pour tout  $t \in I$  par :

$$X'(t) = AX(t) \quad (\text{H})$$



On notera que  $X$  et  $B$  sont des fonctions de  $I$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

#### Exercice 5

Écrire sous forme matriciel le système d'équation différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}(y(t) + z(t)) \\ y'(t) = \frac{1}{2}(x(t) + z(t)) \\ z'(t) = \frac{1}{2}(x(t) + y(t)) \end{cases}$$

#### Remarque

On peut bien sûr utiliser les résultats sur les équations différentielles scalaires pour résoudre des systèmes différentiels.

#### Exercice 6

Résoudre le système différentiel :  $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ .

## IV.2. États d'équilibre et trajectoires

### IV.2.a) États d'équilibre

#### Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note ( $H$ ) le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

On appelle **état d'équilibre** (ou **point d'équilibre**) du système différentiel ( $H$ ) toute solution

$X_0 : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall t \in I, AX_0(t) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$



**Théorème 11.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

$$X_0 \text{ état d'équilibre de } (H) \Leftrightarrow \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$X_0 \text{ état d'équilibre de } (H) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{les coordonnées de } X_0 \text{ sont} \\ \text{des fonctions constantes sur } I \end{array}$$

*Démonstration.*

Soit  $X_0$  une solution de  $(H)$ . Alors il existe des fonctions  $x_1, \dots, x_n$  définies sur  $I$  telles que :

$$\forall t \in I, X_0(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$X_0 \text{ état d'équilibre} \Leftrightarrow \forall t \in I, AX_0(t) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, X_0'(t) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \quad (\text{car } X_0 \text{ est} \\ \text{solution de } (H))$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \forall t \in I, \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

**Proposition 1.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Alors :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \text{L'unique état d'équilibre de } (H) \text{ est } t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.*

On procède par double implication.

( $\Rightarrow$ ) Supposons que la matrice  $A$  est inversible.

Soit  $X_0$  une solution de  $(H)$ .

$$X_0 \text{ point d'équilibre de } (H) \Leftrightarrow \forall t \in I, AX_0(t) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, A^{-1}AX_0(t) = A^{-1} \times 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, X_0(t) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

L'unique état d'équilibre de  $(H)$  est donc bien la fonction :

$$\begin{array}{l} X_0 : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

( $\Leftarrow$ ) Supposons que l'unique état d'équilibre de  $(H)$  est  $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Soit  $t \in I$ . Le système  $AX(t) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$  est un système de Cramer (système de  $n$  équations à  $n$  inconnues).

Ce système de Cramer admet une unique solution. La matrice  $A$  est donc inversible.  $\square$

## IV.2.b) Trajectoires

### Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  une solution de  $(H)$ .

Alors l'ensemble  $\{ (x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R} \}$  est appelé **trajectoire** du système différentiel  $(H)$ .

### Remarque

Notons que la trajectoire d'un état d'équilibre est réduite à un unique vecteur.

### Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  une solution de  $(H)$ .

- On dit que la trajectoire  $\{ (x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R} \}$  **converge vers**  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$  si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \ell_i$$

- S'il n'existe pas de tel  $n$ -uplet  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ , alors on dit que la trajectoire **diverge**.

### Remarque

La trajectoire d'un état d'équilibre est toujours convergente.

### MÉTHODO

### Démontrer qu'une trajectoire est divergente

Pour montrer qu'une trajectoire  $\{ (x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R} \}$  est divergente, il suffit de démontrer que l'une des coordonnées  $x_i$  vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = \pm\infty$$

### Exercice 7

On considère le système différentiel  $(S)$  suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2} (y(t) + z(t)) \\ y'(t) = \frac{1}{2} (x(t) + z(t)) \\ z'(t) = \frac{1}{2} (x(t) + y(t)) \end{cases}$$

- Vérifier que les fonctions suivantes sont solutions de  $(S)$  :

$$X_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad X_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

- Les trajectoires définies par les solutions précédentes sont-elles convergentes ?

### Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Lorsque toutes les trajectoires du système  $(H)$  convergent vers un même état d'équilibre, on dit que cet état d'équilibre est **stable**.

### Exercice 8

Le système différentiel de l'exercice 6 admet-il un état stable ?

### IV.3. Problème de Cauchy

#### Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soient  $t_0 \in I$  et  $\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Un **problème de Cauchy** est la donnée :

- d'un système différentiel :

$$X' = AX$$

- d'une **condition initiale** de la forme :

$$X(t_0) = \tilde{X}_0$$

Autrement dit, c'est la donnée du problème suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in I, X'(t) = AX(t) \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i(t_0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

#### Théorème 12.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soient  $t_0 \in I$  et  $\tilde{X}_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = \tilde{X}_0 \end{cases}$$

#### Exercice 9

1. Montrer que si  $X$  est une solution non nulle de  $X' = AX$ , alors  $X$  ne s'annule en aucun point de  $I$ .
2. Montrer que si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux solutions distinctes de l'équation différentielle  $(H)$ , alors :  $\forall t \in I, X_1(t) \neq X_2(t)$ .
3. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Déterminer l'unique solution du système différentiel  $X' = \lambda X$  satisfaisant  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### IV.4. Résolution du système homogène

#### IV.4.a) Généralités

#### Proposition 2.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

On note  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de  $(H)$ .

Alors  $\mathcal{S}_H$  est un espace vectoriel.

#### Théorème 13.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $t_0 \in I$ .

On note  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de  $(H)$ .

L'application  $\Phi$  suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathcal{S}_H \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto X(t_0) \end{aligned}$$

En particulier :  $\dim(\mathcal{S}_H) = n$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $\Phi$  est linéaire par linéarité de la dérivation et linéarité de l'évaluation en 0.
- Montrons que  $\Phi$  est surjective.  
Soient  $t_0 \in I$  et  $\tilde{X}_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .  
Alors il existe une fonction  $X$  solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in I, X'(t) = A X(t) \\ X(t_0) = \tilde{X}_0 \end{cases}$$

Ainsi il existe  $X \in \mathcal{S}_H$  tel que :  $X(t_0) = \tilde{X}_0$ . Autrement dit, il existe  $X \in \mathcal{S}_H$  tel que :  $\Phi(X) = \tilde{X}_0$ .  
On en déduit que  $\Phi$  est surjective.

- Montrons que  $\Phi$  est injective.

Soit  $X \in \mathcal{S}_h$ .

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(\Phi) &\Leftrightarrow \Phi(X) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow X(t_0) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow X \text{ solution du problème de Cauchy } \begin{cases} X' = A X \\ X(t_0) = 0 \end{cases}$$

Or :

- × La fonction nulle  $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^I} : t \mapsto 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$  est solution de ce problème de Cauchy,
- × ce problème de Cauchy admet une unique solution.

On en déduit :

$$X \in \text{Ker}(\Phi) \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^I}$$

Ainsi :  $\text{Ker}(\Phi) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^I}\}$ . L'application  $\Phi$  est donc injective.

Finalement, l'application  $\Phi$  est :

- × linéaire,
- × injective et surjective, donc bijective.

C'est donc un isomorphisme. En particulier :

$$\dim(\mathcal{S}_H) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$$

□

#### IV.4.b) Cas où $A$ est diagonalisable

##### Proposition 3.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soient  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre associé.

Alors la fonction  $X : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$  est solution du système différentiel  $X' = A X$  sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.*

$$\text{On note } X : t \mapsto e^{\lambda t} X_0 = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

- D'une part :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \lambda c_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \lambda c_n e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \lambda X(t)$$

- D'autre part, comme  $X_0$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  :

$$A X(t) = e^{\lambda t} \cdot A X_0 = e^{\lambda t} \lambda \cdot X_0 = \lambda X(t)$$

Finalement :  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A X(t)$ .

La fonction  $X$  est donc solution du système différentiel  $X' = A X$ . □

**Théorème 14. (HP)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

• Supposons que  $A$  est **diagonalisable**. On note :

- ×  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les valeurs propres de  $A$  (non nécessairement distinctes),
- ×  $(U_1, \dots, U_n)$  une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $A$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le vecteur  $U_i$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\alpha_i$ .

Alors l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_H$  de  $(H)$  est :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_H &= \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{\alpha_i t} U_i \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \text{Vect}(f_1, \dots, f_n) \end{aligned}$$

où  $f_1 : t \mapsto e^{\alpha_1 t} U_1, \dots, f_n : t \mapsto e^{\alpha_n t} U_n$ .

**Proposition 4.**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Soit  $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  une fonction dérivable sur  $I$  (i.e. dont chaque fonction coordonnée est dérivable sur  $I$ ).

Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Alors la fonction  $Y = BX$  est dérivable sur  $I$  et :

$$\forall t \in I, \quad Y'(t) = BX'(t)$$

On retiendra :

$$(BX)' = BX'$$

**MÉTHODO****Résolution de  $X' = AX$  dans le cas  $A$  diagonalisable**

Pour résoudre le système différentiel  $X' = AX$ , noté  $(H)$ , dans le cas où  $A$  est diagonalisable, on procède de la façon suivante.

1. On détermine les valeurs propres de  $A$ .
2. On détermine une base de chacun des sous-espaces propres de  $A$ .
3. On démontre que  $A$  est diagonalisable et on obtient :
  - × une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible qui est la concaténation des bases des sous-espaces propres de  $A$ ,
  - × une matrice  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $A$ ,
 telles que :  $A = PDP^{-1}$ .
4. Soit  $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$X \text{ solution de } (H) \Leftrightarrow X' = AX$$

$$\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X)$$

$$\Leftrightarrow Y' = DY \quad (\text{où } Y = P^{-1}X)$$

5. On résout le système  $Y' = DY$  grâce aux résultats sur les équations différentielles linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
6. On en déduit les solutions de  $(H)$  en calculant :  $X = PY$ .

**Exercice 10**

On note :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

*Démonstration.*

- Déterminons les valeurs propres de  $A$ .  
Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det \left( \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= (2-\lambda)^2 - 1 \\ &= (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ OU } \lambda = 3 \end{aligned}$$

On en déduit :  $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$ .

- On remarque que :

- ×  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,
- ×  $A$  admet 2 valeurs propres distinctes.

Cette matrice est donc diagonalisable.

- Déterminons  $E_1(A)$ . Soit  $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . Alors il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} U \in E_1(A) &\Leftrightarrow (A - I_2)U = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \{ x + y = 0 \} \\ &\Leftrightarrow \{ x = -y \} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = -y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- On démontre de même :  $E_3(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

- Comme  $A$  est diagonalisable, alors il existe :

- × une matrice  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  inversible qui est la concaténation des bases des sous-espaces propres de  $A$ ,
- × une matrice  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  diagonale donc les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $A$ ,

telles que :  $A = PDP^{-1}$ . On obtient ici :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Soit  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$X \text{ solution de } (H) \Leftrightarrow X' = AX$$

$$\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X)$$

$$\Leftrightarrow Y' = DY \quad (\text{où } Y = P^{-1}X)$$

- Résolvons alors le système  $Y' = DY$ , noté  $(H')$ .

Soit  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . Alors il existe deux fonctions  $y_1$  et  $y_2$  telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
Y' = DY &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 3y_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 e^t \\ y_2(t) = \lambda_2 e^{3t} \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_{H'}$  de  $(H')$  est :

$$\mathcal{S}_{H'} = \{t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{3t} \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Revenons à la résolution de  $(H)$ .

Soit  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$X \text{ solution de } (H) \Leftrightarrow Y' = DY \quad (\text{où } Y = P^{-1}X)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{3t} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{3t} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{3t} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{3t} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t} \\ \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_H$  de  $(H)$  est :

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \begin{pmatrix} -\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t} \\ \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t} \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Il reste enfin à trouver l'unique solution du problème de Cauchy. Soit  $X \in \mathcal{S}_H$ . Alors il existe  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t} \\ \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ 2\lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2} \begin{cases} -2\lambda_1 = 2 \\ 2\lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Finalement, l'unique solution au problème de Cauchy est la fonction :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\
t &\mapsto \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} \\ -e^t + e^{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

### Théorème 15.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Supposons que  $A$  est **diagonalisable**.

- Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de  $(H)$  convergent vers un état d'équilibre.
- Si  $A$  possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires de  $(H)$  divergentes.

**Exercice 11**

1. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2} (y(t) + z(t)) \\ y'(t) = \frac{1}{2} (x(t) + z(t)) \\ z'(t) = \frac{1}{2} (x(t) + y(t)) \end{cases}$$

2. Les trajectoires de ce système sont-elles convergentes ou divergentes ?

**Remarque**

Dans le cas où  $A$  n'est pas diagonalisable, on se laisse guider par l'énoncé. On donne ci-dessous un exemple d'un tel cas.

**Exercice 12**

On considère le système différentiel défini sur  $\mathbb{R}$  suivant :

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = -4x - 3y + 4z \\ z' = -2x \quad \quad \quad + z \end{cases} \quad (E)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont trois fonctions inconnues de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . Donner une matrice  $A$  telle que :

$$(E) \Leftrightarrow X' = AX$$

2. a) Déterminer les valeurs propres de  $A$  et leurs sous-espaces propres associés.

b) On note  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Démontrer que  $P$  est inversible et calculer

$$P^{-1}.$$

c) Déterminer la matrice  $T$  telle que :  $T = P^{-1}AP$ .

3. a) Résoudre, pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , l'équation  $f' = -f + 2ce^{-t}$ .

b) On note :  $Y = P^{-1}X$ . Démontrer :

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$$

c) Résoudre le système différentiel  $Y' = TY$ .

4. En déduire l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_E$  du système  $X' = AX$ .

5. En déduire une solution non stationnaire (*i.e.* non constante) qui converge vers l'unique état d'équilibre du système ( $E$ ).

**IV.4.c) Cas où  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $A$  diagonalisable****Proposition 5.**

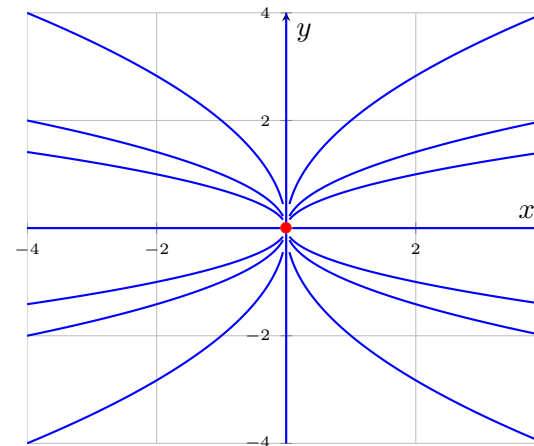
Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $(H)$  le système différentiel  $X' = AX$  défini sur  $\mathbb{R}$ .

Supposons que  $A$  est diagonalisable. On note  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ses valeurs propres. Cinq cas se présentent.

1. Si  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , alors

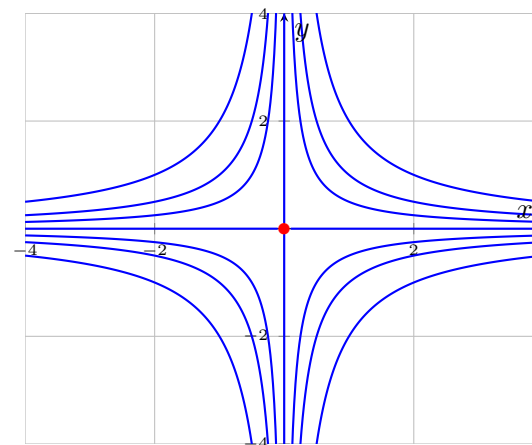
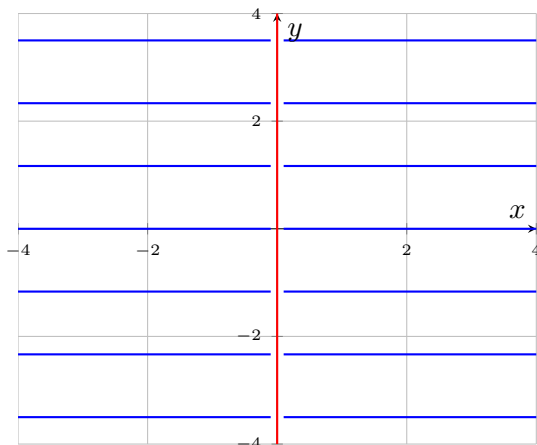
- × toutes les trajectoires non stationnaires de  $(H)$  sont divergentes.
- × le système  $(H)$  admet un unique point d'équilibre  $(0, 0)$
- × ce point d'équilibre est instable.





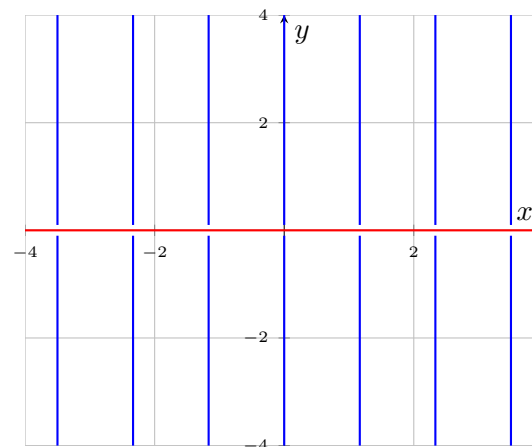
2. Si  $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$ , alors :

- × toutes les trajectoires non stationnaires de  $(H)$  sont divergente.
- × le système  $(H)$  admet une infinité de points d'équilibre.
- × tous ces points d'équilibre sont instables.



4. Si  $\lambda_1 = 0 > \lambda_2$ , alors :

- × toutes les trajectoires de  $(H)$  sont convergentes.
- × le système  $(H)$  admet une infinité de points d'équilibre.
- × tous ces points d'équilibre sont instables.

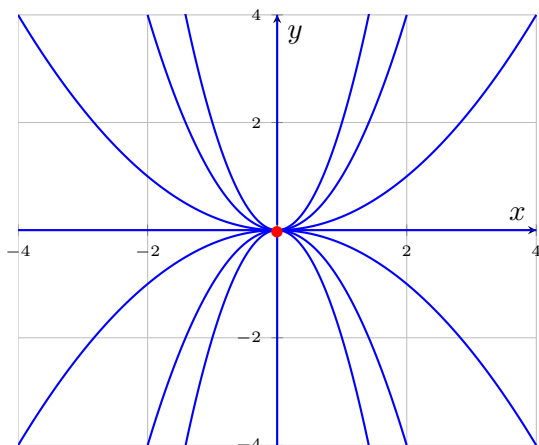


3. Si  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ , alors :

- × toutes les trajectoires de  $(H)$  sauf 2 sont divergentes.
- × le système différentiel  $(H)$  admet  $(0,0)$  comme unique point d'équilibre.
- × les deux trajectoires non divergentes convergent vers le point d'équilibre.  
On dit que ce point d'équilibre est un **point selle**.

5. Si  $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ , alors :

- × toutes les trajectoires de  $(H)$  sont convergentes.
- × le système  $(H)$  admet  $(0, 0)$  comme unique point d'équilibre.
- × ce point d'équilibre est stable.



### Remarque

Le tableau suivant récapitule la nature des points d'équilibre du système différentiel  $X' = AX$  suivant le signe des valeurs propres de  $A$ .

$\lambda_1 \backslash \lambda_2$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$
$\lambda_1 < 0$	unique et stable	une infinité et instables	unique et point selle
$\lambda_1 = 0$	une infinité et instables	une infinité et instables	une infinité et instables
$\lambda_1 > 0$	unique et point selle	une infinité et instables	unique et instable

*Démonstration.*

Soit  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . Alors il existe  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

$$X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = x(0) e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y(0) e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Deux cas se présentent alors.

- Si  $x(0) = 0$ , alors :  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = 0$ .  
Autrement dit, la fonction  $x$  est la fonction nulle.
- Si  $x(0) \neq 0$ , alors :  $\forall t \in \mathbb{R}, x(t) \neq 0$ .  
Autrement dit, la fonction  $x$  ne s'annule en aucun point de  $\mathbb{R}$ .  
Ainsi :  $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{x(t)}{x(0)} = e^{\lambda_1 t} > 0$ . D'où, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( \frac{x(t)}{x(0)} \right)$$

On en déduit :

$$y(t) = y(0) \left( \frac{x(t)}{x(0)} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

En écrivant cette égalité sous la forme d'une égalité de fonctions, on obtient :

$$y = y(0) \left( \frac{x}{x(0)} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

On obtient les différents cas à l'aide de la formule précédente, puis en intervertissant le rôle de  $x$  et  $y$ .  $\square$



Les portraits de phase sont représentés dans une base de diagonalisation de  $A$  :

- × le premier axe est porté par un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$ ,
- × le second axe est porté par un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_2$ ,

#### IV.5. Lien avec les équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

On note  $(E)$  l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants homogène définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

On pose alors :

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire l'équivalence suivante :

$$(E) \Leftrightarrow X' = AX$$

On peut alors déterminer les solutions de l'équation différentielle  $(E)$  avec les méthodes de résolution des systèmes différentiels.

1. On commence par déterminer  $\text{Sp}(A)$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \left( \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a - \lambda \end{pmatrix} \right) = \lambda(a + \lambda) + b = \lambda^2 + a\lambda + b = Q(\lambda)$$

On retrouve le polynôme  $Q$  caractéristique de  $(E)$ .

On obtient :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow Q(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Trois cas se présentent alors.

• Si  $Q$  admet deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors :  $\text{Sp}(A) = \{r_1, r_2\}$ .

2. On sait alors :

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,
- $A$  admet 2 valeurs propres distinctes.

La matrice  $A$  est donc diagonalisable.

3. On démontre aisément :

$$\dim(E_{r_1}(A)) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(E_{r_2}(A)) = 1$$

On note  $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$  une base de  $E_{r_1}(A)$ , et  $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$  une base de  $E_{r_2}(A)$ .

On peut alors écrire  $A = PDP^{-1}$  où :

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

4. De plus :

$$\begin{aligned} X' = AX &\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \\ &\Leftrightarrow Y' = DY \quad \quad \quad (\text{où } Y = P^{-1}X) \end{aligned}$$

5. Résolvons alors le système  $Y' = DY$ , noté  $(H')$ .

Soit  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . Alors il existe deux fonctions  $y_1$  et  $y_2$  telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$Y' = DY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = r_1 y_1 \\ y_2' = r_2 y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = \mu_1 e^{r_1 t} \\ y_2(t) = \mu_2 e^{r_2 t} \end{cases}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_{H'}$  de  $(H')$  est :

$$\mathcal{S}_{H'} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 e^{r_1 t} \\ \mu_2 e^{r_2 t} \end{pmatrix} \mid (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

6. Revenons à la résolution de  $(E)$ .

$y$  solution de  $(E)$

$$\Leftrightarrow X' = AX$$

$$\Leftrightarrow Y' = DY$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} \mu_1 e^{r_1 t} \\ \mu_2 e^{r_2 t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, P^{-1} X(t) = \begin{pmatrix} \mu_1 e^{r_1 t} \\ \mu_2 e^{r_2 t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P \begin{pmatrix} \mu_1 e^{r_1 t} \\ \mu_2 e^{r_2 t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = u_1 \mu_1 e^{r_1 t} + u_2 \mu_2 e^{r_2 t}$$

Ainsi l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_E$  de  $(E)$  est :

$$\mathcal{S}_E = \{ t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

- Si  $Q$  admet une unique racine  $r_0$ , alors :  $\text{Sp}(A) = \{r_0\}$ .
- 2. On peut démontrer, en raisonnant par l'absurde, que la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable car  $A \neq r_0 I_2$ .
- 3. On démontre aisément :

$$\dim(E_{r_0}(A)) = 1$$

On note  $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$  une base de  $E_{r_0}(A)$ .

Soit  $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$  non colinéaire à  $U_0$ . Alors  $(U_0, U_1)$  forme une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  (à démontrer proprement) et il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que, en notant :

$$P = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} r_0 & c \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

on obtient :  $A = PTP^{-1}$ .

(on peut démontrer, en raisonnant par l'absurde, que  $T$  s'écrit forcément sous cette forme (et non  $\begin{pmatrix} r_0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$  où  $d \neq r_0$ ) sinon  $A$  admettrait deux valeurs propres distinctes, ce qui n'est pas le cas)

4. De plus :

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PTP^{-1} X$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} X' = TP^{-1} X$$

$$\Leftrightarrow (P^{-1} X)' = T(P^{-1} X)$$

$$\Leftrightarrow Y' = TY \quad (\text{où } Y = P^{-1} X)$$

5. Résolvons alors le système  $Y' = TY$ , noté  $(H')$ .

Soit  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . Alors il existe deux fonctions  $y_1$  et  $y_2$  telles

que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$Y' = TY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & c \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = r_0 y_1 + c y_2 \\ y_2' = r_0 y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \mu_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = r_0 y_1 + \mu_1 c e^{r_0 t} \\ y_2(t) = \mu_1 e^{r_0 t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = \mu_2 e^{r_0 t} + \mu_1 c t e^{r_0 t} \\ y_2(t) = \mu_1 e^{r_0 t} \end{cases}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_{H'}$  de  $(H')$  est :

$$\mathcal{S}_{H'} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \mu_2 e^{r_0 t} + \mu_1 c t e^{r_0 t} \\ \mu_1 e^{r_0 t} \end{pmatrix} \mid (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

6. Revenons à la résolution de  $(E)$ .

$y$  solution de  $(E)$

$$\Leftrightarrow X' = AX$$

$$\Leftrightarrow Y' = TY$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} \mu_2 e^{r_0 t} + \mu_1 c t e^{r_0 t} \\ \mu_1 e^{r_0 t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, P^{-1} X(t) = \begin{pmatrix} \mu_2 e^{r_0 t} + \mu_1 c t e^{r_0 t} \\ \mu_1 e^{r_0 t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P \begin{pmatrix} \mu_2 e^{r_0 t} + \mu_1 c t e^{r_0 t} \\ \mu_1 e^{r_0 t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (u_0 \mu_2 + u_1 \mu_1) e^{r_0 t} + u_0 \mu_1 c t e^{r_0 t}$$

Ainsi l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_E$  de  $(E)$  est :

$$\mathcal{S}_E = \{ t \mapsto \lambda_1 e^{r_0 t} + \lambda_2 t e^{r_0 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$$

- Si  $Q$  n'admet pas de racine, alors :  $\text{Sp}(A) = \emptyset$ . Dans ce cas, on ne peut pas conclure.

#### IV.6. Équations différentielles d'ordre supérieur à 3

Illustrons la résolution de ce type d'équation différentielle sur un exemple.

##### Exercice 13

On note  $(E)$  l'équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants homogène définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$y^{(4)}(t) - 5y^{(3)}(t) + 5y''(y) + 5y'(t) - 6y(t) = 0$$

1. Soit  $y \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On note  $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$ . Expliciter une matrice  $A$  telle

que :

$$(E) \Leftrightarrow X' = AX$$

2. a) Démontrer :  $\text{Sp}(A) = \{-1, 1, 2, 3\}$ .

b) Justifier que la matrice  $A$  est diagonalisable.

- c) Déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale dont les coefficients diagonaux sont placés dans l'ordre croissant telles que :  $A = PDP^{-1}$ .

3. a) On note  $Y = P^{-1}X$ . Démontrer :

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$$

b) Résoudre le système différentiel  $Y' = DY$ .

4. En déduire l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_E$  de l'équation différentielle  $(E)$ .